**بنام خدا**

# جزوه درس ژئودزی و محاسبات

بسم الله الرحمن الرحيم

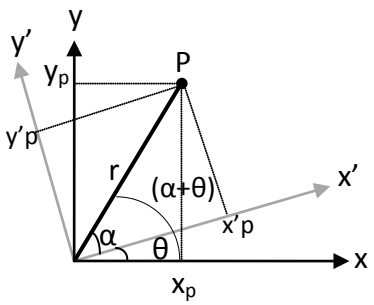
فصل اول : سیستمهای مختصات 1
ماتریس های دوران 1
ماتریس دوران سه بعدی 2
ماتریس های دوران (ω,φ,κ) 2
تبدیل سیستم دست راستی به دست چپی 3
سیستم های مختصات 3
طبقه بندی سیستم های مختصات 3
سیستم مختصات قطبی 3
سیستم مختصات جغرافیایی 3
سیستم مختصات استوانه ای 4
سیستم های ژئوسنتریک 4
قطب متوسط CIO (Conventional International Origin) 4
نصف النهار متوسط گرینویچ 5
سیستم مختصات متوسط ژئوسنتریک (CT یا AT ؛ Average Terrestrial ) 5
سیستم مختصات لحظه ای ژئوسنتریک (IT) 5
سیستم مختصات ژئودتیک (G) 6
تطابق سیستم ها 6
انواع عرض ها در ژئودزی 6
بدست آوردن رابطه بین مختصات کارتزین و منحنی الخط 8
تبدیل φ,λ,h به x,y,z ( تبدیل منحنی الخط به کارتزین) 9
تبدیل مختصات از منحنی الخط به مستقیم الخط و برعکس 11
شعاع اویلر 13
آزیموت ژئودتیکی (α) 13
سطوح مختصات ژئودتیکی 13
زاویه انحراف قائم (θ) 14
مولفه های زاویه انحراف قائم 14
سیستم های توپوسنتریک 14
1-سیستم مختصات نجومی محلی (LA→Local Astromical) 14
2-سیستم مختصات ژئودتیکی محلی (LG → Local Geodetic) 15
تبدیلات بین سیستم های مختصات 15
معادلات لاپلاس 16
تعریف دیتوم 16
تبدیل دیتوم 17
خم های روی بیضوی 19
تصحیحات 19
انواع تصحیحات 20
تصحیح فیزیکی 20
تصحیح هندسی 22

تصحیح ژئودزیک 23
معادله یک خم بر اساس طول قوس 23
تصحیحات طولی 24
فصل دوم : محاسبات مختصات روی بیضوی 25
محاسبات مختصات روی بیضوی 25
مسأله مستقیم 25
مسأله معکوس 25
روش گاوس 26
روش پواسن 26
مسئله مستقیم گاوس 27
مسئله معکوس گاوس 27
فصل سوم : سیستم های تصویر 28
سیستم های تصویر متشابه 28
مروری بر اعداد مختلط 28
مروری بر هندسه دیفرانسیل 30
کمیت های اصلی گاوس 31
زاویه بین مدارات و نصف النهارات 32
معرفی صفحه ایزومتریک 33
روش نیوتن برای محاسبه ریشه یک معادله 34
تعریف ضریب اشل (Scale Factor) 35
ضریب مقیاس 36
تقارب نصف النهاری 36
بررسی مختصری بر سیستمهای تصویر 37
1) سیستم تصویر مرکاتور 37
منحنی لوکسدروم (loxodrome) 37
ویژگی های اساسی 37
2) سیستم تصویر ترانسورس مرکاتور (TM) 39
3) سیستم ترانسورس مرکاتور جهانی (UTM) 39
ضریب مقیاس 40
منابع 43

# فصل اول : سیستمهای مختصات

**ماتریس های دوران:**

ساده ترین ماتریس دوران، یک ماتریس دو بعدی است، فرض کنید دو سیستم مختصات به صورت زیر داریم:




$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ماتریس دوران} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

میتوان مختصات نقطه ای مانند $P$ را در هر دو سیستم بصورت زیر نوشت:

$x_p=rCos(\alpha+\theta)=rCos(\alpha)Cos(\theta)-rSin(\alpha)Sin(\theta)$ $\longrightarrow$

$x_p=x'_p\,Cos(\theta)-y'_p\,Sin(\theta)$ $\quad$ *[1]*

$y_p=rSin(\alpha+\theta)=rSin(\alpha)Cos(\theta)+rCos(\alpha)Sin(\theta)$ $\longrightarrow$

$y_p=y'_p\,Cos(\theta)+x'_p\,Sin(\theta)$ $\quad$ *[2]*

$x'_p=rCos(\alpha)=x'$ $\qquad$ $y'_p=rSin(\alpha)=y'$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos(\theta) & -Sin(\theta) \\ Sin(\theta) & Cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

نکته: دترمینان ماتریس های دوران همیشه یک است، زمانی که دترمینان یک می شود یعنی ضرب مقیاس در آن تاثیری ندارد، هر ماتریس که دترمینان آن بزرگتر از یک باشد، مقیاس را بزرگتر می کند، و اگر دترمینان آن کوچکتر از یک شود مقیاس را کوچک می کند.

- مجموع مربع عناصر هر سطر یا ستون برابر با یک می باشد:

$Sin^2\theta+Cos^2\theta = 1$

- اگر $R$ یک ماتریس متعامد ( اورتوگونال ) باشد، آنگاه : $R^{-1}=R^t$

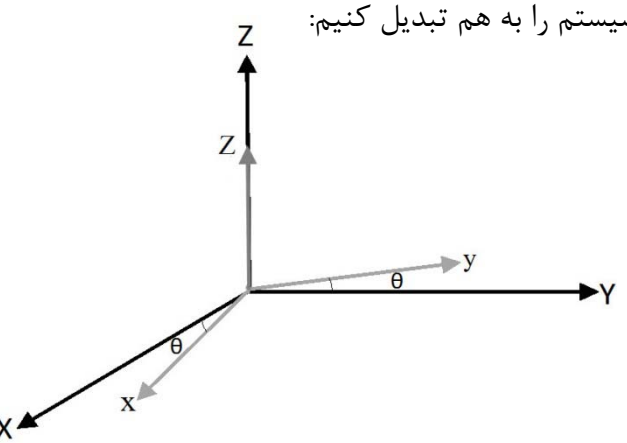
درصورتی که بخواهید مختصات نقطهای را از سیستم $x',y'$ به سیستم $x,y$ تبدیل کنید آنگاه:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**ماتریس دوران سه بعدی:**

برای مثال می خواهیم با دوران حول محور $Z$ به اندازه $\theta$ این دو سیستم را به هم تبدیل کنیم:



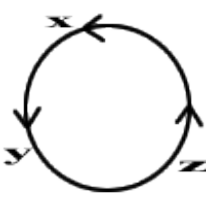

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

**ماتریس های دوران (ω,φ,κ) :**

دوران حول محور $x$ ؛ $\omega$ $\quad y \longrightarrow z \quad$ منفی جلوی $z$

دوران حول محور $y$ ؛ $\varphi$ $\quad z \longrightarrow x \quad$ منفی جلوی $x$

دوران حول محور $z$ ؛ $\kappa$ $\quad x \longrightarrow y \quad$ منفی جلوی $y$




$$M_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega) & \sin(\omega) \\ 0 & -\sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix} \quad M_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad M_\kappa = \begin{pmatrix} \cos(\kappa) & \sin(\kappa) & 0 \\ -\sin(\kappa) & \cos(\kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

دوران کلی $M = M_\kappa . M_\varphi . M_\omega$

در صورتی که بخواهید ماتریس های $R$ را بدست آورید کافیست، همین ماتریس ها را ترانهاده کنید.

$$R_\omega = M_\omega^t = M_\omega^{'}$$
$$R_\varphi = M_\varphi^t = M_\varphi^{'}$$
$$R_\kappa = M_\kappa^t = M_\kappa^{'}$$

**تبدیل سیستم دست راستی به دست چپی:**

جهت تبدیل سیستم دست راستی به دست چپی، کافیست ماتریس زیر را در مختصات یک نقطه ضرب کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ -Y \\ Z \end{pmatrix}$$

**سیستم های مختصات:**

سیستم مختصات مبنایی برای تعریف نقاط، خطوط یا اشیاء در فضا می باشد که توسط فواصل، زوایا و یا هردو تعریف می شود.

**طبقه بندی سیستم های مختصات:**

۱ -*سیستم مختصات قائم الزاویه* : موقعیت نقاط یا اشیا بر اساس فاصله از محورهای مختصات بیان می شود.

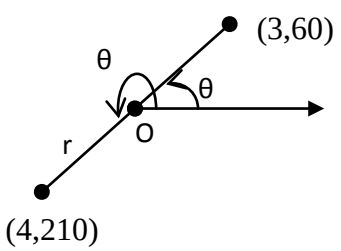
۲ -*سیستم مختصات کروی* : موقعیت نقاط یا اشیا بر اساس زاویه هایی که با امتدادها یا صفحات معلوم می-سازند، بیان میشود.

* برای ایجاد یک سیستم مختصات خاص، ممکن است از ترکیب سیستم های مختصات قائم الزاویه و کروی استفاده شود.

**سیستم مختصات قطبی:**

نقاط در یک صفحه، با فاصله از مبدأ و زاویهای که نسبت به یک امتداد معلوم می سازند، تعریف می شوند:

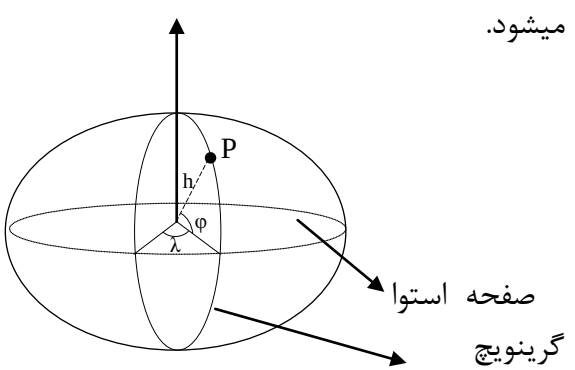
موقعیت یک نقطه در این سیستم مختصات با $P(r,\theta)$ نشان داده میشود.



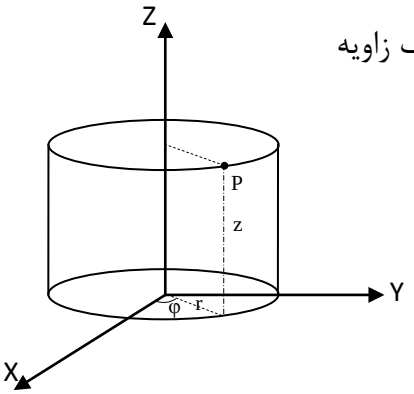

**سیستم مختصات جغرافیایی:**

هر نقطه با دو زاویه ( طول و عرض جغرافیایی) و یک فاصله ( ارتفاع از یک سطح مبنا) تعریف می شود.

موقعیت یک نقطه در این سیستم مختصات با $P\ (\varphi,\lambda,h)$ نشان داده میشود.



**سیستم مختصات استوانه ای:**




مختصات هر نقطه با فاصله شعاعی از یک محور مبنا و ارتفاع از یک سطح مبنا و یک زاویه

نسبت به یک امتداد مبنا تعریف می شود.

موقعیت یک نقطه در این سیستم مختصات با $P\ (r,\varphi,z)$ نشان داده میشود.

**سیستم های ژئوسنتریک:**

مبدأ: نزدیک مرکز زمین

محور $x$ : در راستای محل تقاطع استوا و نصف النهار گرینویچ

محور $z$ : در راستای محور دورانی

محور $y$ : سیستم دست راستی.

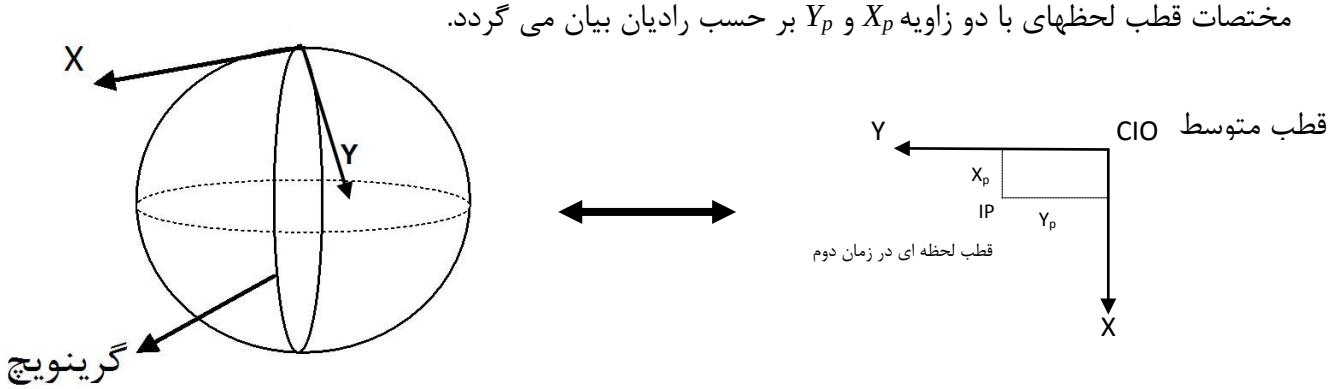
* محور دورانی زمین به دلیل حرکت نوتیشن آزاد (حرکت قطبی) تغییر می کند. با تغییر محور دورانی، صفحه استوا نیز تغییر می کند، علاوه بر اینها، به دلیل غیر یکنواخت بودن حرکت دورانی زمین، نصف النهار گرینویچ نیز محل ثابتی در فضا ندارد. پس باید تعریف دیگری را ارائه نماییم.

**قطب متوسط CIO (Conventional International Origin)**

به متوسط محل قطب لحظه ای بین سالهای ۱۹۰۵ – ۱۹۰۰ قطب متوسط می گویند. برای اینکه بتوان قطب لحظه ای را بصورت پارامتری تعریف کرد، سیستم مختصات دو بعدی را به صورت زیر تعریف می نماییم:

*[مقدار $X_p$ و $Y_p$ را می توانید روزانه از اینترنت بگیرید. (قطب لحظه ای ($IP$))]*

مختصات قطب لحظهای با دو زاویه $X_p$ و $Y_p$ بر حسب رادیان بیان می گردد.



**نصف النهار متوسط گرینویچ:**

اگر یک سرعت دورانی متوسط برای زمین در نظر گرفته شود، می توان نصف النهار متوسط را نیز تعریف کرد (صفحه ای که از محور دورانی متوسط و گرینویچ عبور کرده و بر استوای متوسط عمود باشد)

نکته کنکوری : در نصف النهار متوسط گرینویچ اثر تغییرات فصلی ( مربوط به سرعت غیریکنواخت و دوران) و حرکت قطبی تصحیح شده است.

**سیستم مختصات متوسط ژئوسنتریک (CT یا AT ؛ Average Terrestrial )**

مبدأ: روی مرکز ثقل زمین

محور $Z$ : در امتداد محور دورانی متوسط

محور $X$ : محل تقاطع استوای متوسط با نصف النهار متوسط گرینویچ

محور $Y$ : سیستم دست راستی

**سیستم مختصات لحظه ای ژئوسنتریک (IT):**

مبدأ: روی مرکز ثقل زمین

محور $Z$ : در امتداد محور دورانی لحظه ای

محور $X$ : محل تقاطع استوای لحظه ای با نصف النهار متوسط گرینویچ

محور $Y$: سیستم دست راستی

*برای تبدیل سیستم $IT$ به $AT$ از رابطه زیر می توان استفاده کرد:

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_{At}} = R_2(-X_p)\, R_1(-Y_p)\, \overrightarrow{e_{It}} \\ \overrightarrow{e_{It}} = R_1(Y_p)\, R_2(X_p)\, \overrightarrow{e_{At}} \end{cases}$$

بردار یکه It

$$R^{-1}(\alpha) = R^{t}(\alpha) = R(-\alpha)$$

نکته : در چه حالتی این معادله برقرار است :

$$R_2(X_p)R_1(Y_p) = R_1(Y_p)R_2(X_p)$$

زمانی که $X_p, Y_p \approx 0$ ، یعنی این دو خیلی کوچک باشند.

## سیستم مختصات ژئودتیک (G):

سطح مبنای مسطحاتی در ژئودزی یک بیضوی دورانی است که از دوران بیضی حول محور اقصر آن بوجود آمده است.

معادله بیضوی دو محوری

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

$$F=1-\frac{b}{a} \rightarrow 1-F=\frac{b}{a}$$

معادله بیضوی سه محوری

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{C^2}=1$$

فشردگی هندسی

$$F=\frac{a-b}{a}=1-\frac{b}{a}$$

رابطه بین e و f $\longrightarrow$ $e^2=1-(1-F)^2$

خروج از مرکزیت

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$$

مبدأ : مرکز بیضوی

محور $Z$ : محور دورانی بیضوی (منطبق بر محور اقصر )

محور $X$ : محل تقاطع استوای ژئودتیکی و نصف النهار ژئودتیکی گرینویچ

محور $Y$ : سیستم دست راستی

## تطابق سیستم ها :

$$\vec{e}_G=\vec{e}_{At}+\vec{e}_0$$

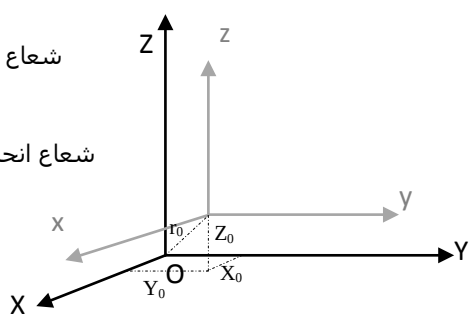
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_G=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{AT}+\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$

شعاع انحناء مقطع قائم اولیه

$$N=\frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$$

شعاع انحناء مقطع نصف النهاری

$$M=\frac{a(1-e)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

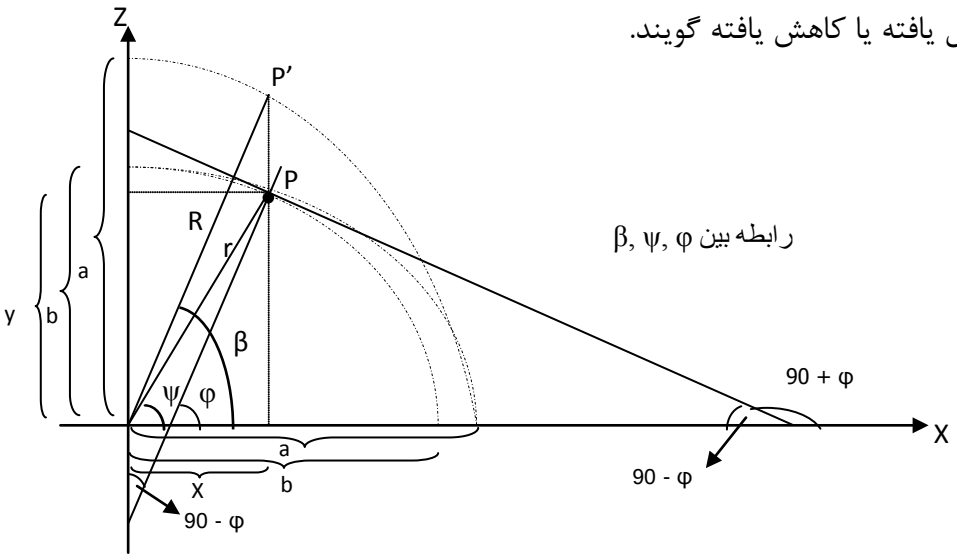


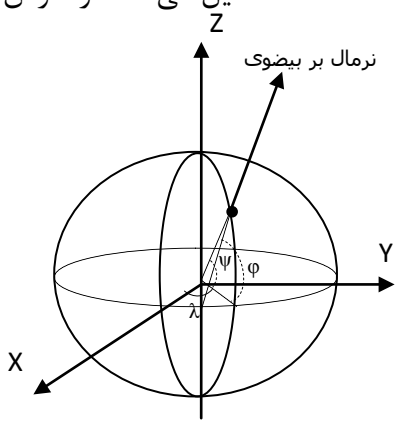

## انواع عرض ها در ژئودزی :

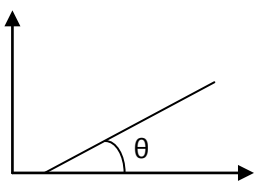
۱ -**عرض ژئودتیک (*Geodetic Latitude - φ*)** : زاویه بین امتداد نرمال ( امتداد قائم بر سطح بیضوی در یک نقطه) و صفحه اولیه (استوایی) را عرض ژئودتیک گویند.

۲ -**عرض ژئوسنتریک ( *Geocentric Latitude - ψ*)** : زاویه بین امتداد نقطه مورد نظر و مبدا با صفحه استوایی را عرض ژئوسنتریک گویند.

۳ -**عرض تبدیل یافته ( *Reduced Latitude - β*)** : یک عرض با تعریف ریاضی است که برای ساده سازی روابط ریاضی ( مخصوصا در مبحث تصویر کردن بیضوی ) استفاده می شود. به مرکز $O$ و شعاع $\alpha$ دایره ای در نظر گرفته و از نقطه $P$ به موازات محور $Z$ خطی منحنی رسم کرده و در هر جا که دایره را قطع کند همان جا، نقطه $P'$ می باشد. از نقطه $P'$ به مرکز خطی را وصل کرده، زاویه ای که این خط با صفحه استوا تشکیل می دهد را عرض تبدیل یافته یا کاهش یافته گویند.




$\frac{dy}{dx} =$ شیب خط $= \mathrm{Tg}\ \theta$

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{Tg}\,(90 + \varphi) = -\mathrm{Cot}\,(\varphi) \qquad [1]$$

با مشتق گیری از معادله بیضی:

$\frac{Z^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}$ معادله بیضی

$$\frac{2Z\,dz}{b^2} + \frac{2x\,dx}{a^2} = 0 \rightarrow a^2 z\,dz = -\,b^2 x\,dx \rightarrow \frac{dz}{dx} = -\,\frac{b^2 x}{a^2 x} \qquad [2]$$

$$[1] = [2] \rightarrow \frac{b^2 x}{a^2 z} = -Cot\,(\varphi) \rightarrow \frac{x}{z} = \frac{a^2}{b^2} Cot\,(\varphi) \rightarrow \frac{Z}{x} = \frac{b^2}{a^2}\,Tg\,(\varphi) \qquad [3]$$

$$\begin{cases} Z = r\,.\,\sin(\psi) \\ X = r\,.\,\cos(\psi) \end{cases} \longrightarrow \frac{Z}{X} = \mathrm{Tg}\,(\psi) \qquad [4]$$

$$\begin{cases} Z = b\,.\,\sin(\beta) \\ X = a\,.\,\cos(\beta) \end{cases} \longrightarrow \frac{Z}{X} = \frac{b}{a}\tan(\beta) \qquad [5]$$

$$[4] = [3] \rightarrow \mathrm{Tg}(\psi) = \frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{Tg}(\varphi)$$

$$[5] = [3] \rightarrow \frac{b}{a}\mathrm{Tg}(\beta) = \frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{Tg}(\varphi)$$

پس داریم

رابطه بین عرض ها

$$\tan\psi = \frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{Tg}\,(\varphi) = \frac{b}{a}\tan(\beta)$$

روابط زیر نیز برقرار هستند:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N\,\mathrm{Cos}\,\phi\,\mathrm{Cos}\,\lambda \\ N\,\mathrm{Cos}\,\phi\,\mathrm{Sin}\,\lambda \\ N\frac{b^2}{a^2}\,\mathrm{Sin}\,\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\,\mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\lambda \\ r\,\mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Sin}\,\lambda \\ r\,\mathrm{Sin}\,\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\lambda \\ a\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Sin}\,\lambda \\ b\,\mathrm{Sin}\,\beta \end{pmatrix}$$

سوال: با توجه به رابطه زیر کدامیک از گزینه ها صحیح می باشد:

الف) $\varphi>\beta>\psi$ ■

ب) $\varphi>\psi>\beta$ ☐

ج) $\beta>\varphi>\psi$ ☐

د) $\psi>\beta>\varphi$ ☐

تمرین: اگر $\beta=45^\circ$ باشد، $\varphi$ و $\psi$ را بدست آورید؟ ( $F=\frac{1}{300}$ و $a=6400\ km$ )

**بدست آوردن رابطه بین مختصات کارتزین و منحنی الخط :**

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{AT} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_G \qquad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_G = \begin{pmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ (N+h-Ne^2)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

برای اثبات داریم :

$$[3] \rightarrow \frac{z}{x} = \frac{b^2}{a^2}\tan\varphi \rightarrow \frac{z}{x} = \frac{b^2}{a^2} * \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \rightarrow (b^2 x\sin\varphi)^2 = (a^2 z\cos\varphi)^2 \rightarrow$$

$$b^4x^2\sin^2\varphi - a^4z^2\cos^2\varphi = 0 \qquad [I]$$

اگر این روابط را در یک مقطع نصف النهاری بنویسیم، داریم :

$$\frac{Z^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \rightarrow a^2z^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \qquad [II]$$

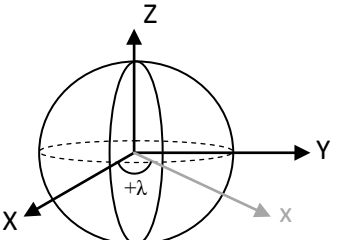
$$\begin{array}{r} \text{از رابطه I} \\ \text{از رابطه II} \end{array} \begin{pmatrix} b^4\sin^2\varphi & -a^4\cos^2\varphi \\ b^2 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^2 \\ Z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a^2b^2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} X^2 \\ Z^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2b^2(b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi)} \begin{pmatrix} a^2 & a^4\cos^2\varphi \\ -b^2 & b^4\sin^2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a^2b^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X^2 \\ Z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4\cos^2\varphi \\ b^4\sin^2\varphi \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{(b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} a^2\cos\varphi \\ b^2\sin\varphi \end{pmatrix}$$

تنها تفاوت سیستم مختصات کارتزین دلخواه با سیستم مختصات کارتزین بیضوی در این است که محور $x$ بر محور $x$ اصلی منطبق نیست، و برای ایجاد این انطباق دورانی به اندازه $+\lambda$ حول محور $Z$ الزامی است.

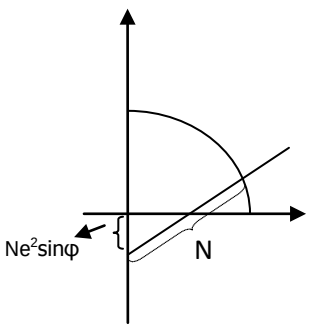
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_3(+\lambda) \begin{pmatrix} X \\ 0 \\ Z \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos(\lambda) & -Sin(\lambda) & 0 \\ Sin(\lambda) & Cos(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}} \begin{pmatrix} a^2Cos\varphi \\ 0 \\ b^2Sin\varphi \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}} \begin{pmatrix} a^2Cos\varphi Cos\lambda \\ a^2Cos\varphi Sin\lambda \\ b^2Sin\varphi \end{pmatrix} \quad \frac{a^2}{a * \sqrt{\frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}} \begin{pmatrix} Cos\varphi Cos\lambda \\ Cos\varphi Sin\lambda \\ \frac{b^2}{a^2}Sin\varphi \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}}_{N} \begin{pmatrix} Cos\varphi Cos\lambda \\ Cos\varphi Sin\lambda \\ \frac{b^2}{a^2}Sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} NCos\varphi Cos\lambda \\ NCos\varphi Sin\lambda \\ N\frac{b^2}{a^2}Sin\varphi \end{pmatrix} \longrightarrow N(1- e^2)\sin\varphi = (N - Ne^2)\sin\varphi$$




در صورتی که به اندازه $h$ ارتفاع داشته باشیم، داریم:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h)Cos\,\varphi\, Cos\lambda \\ (N+h)Cos\,\varphi\, sin\lambda \\ (N+h-Ne^2)Sin\varphi \end{pmatrix}$$

تمرین: اگر $\varphi = 45°$ و $\lambda=50°$ و $h=3000m$ باشد، مختصات کارتزین را برای یک بیضوی با مشخصات $a=6400km$ و $f=\frac{1}{299}$ بدست آورید؟

$b=a(1-F) = 6378.59km$

$e^2=6.67*10^{-3}$

$$N=\frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} = 6410.71$$

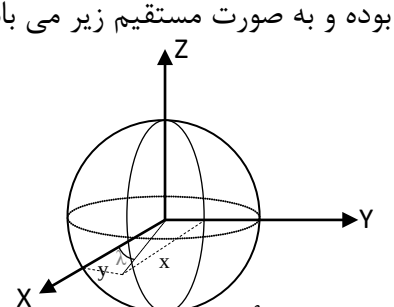
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2915.15\ km \\ 3474.15\ km \\ 4504.91\ km \end{pmatrix}$$

**تبدیل φ,λ,h به x,y,z ( تبدیل منحنی الخط به کارتزین)**

نکته: مشکل در این نوع تبدیل، محاسبه $\varphi,h$ می باشد چراکه به هم وابسته بوده و نمیتوان آنها را جداگانه حساب کرد. محاسبه λ در هر دو روش راحت بوده و به صورت مستقیم زیر می باشد و هر وقت بخواهیم آن را بدست می آوریم.

- ابتدا محاسبه λ

$$\tan\lambda = \frac{y}{x} \rightarrow \lambda = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$




می توان برای جلوگیری از مشکل ناحیه مثلثاتی، ابتدا $\frac{\lambda}{2}$ را به دست آورده و در نهایت آن را در عدد ۲ ضرب میکنیم تا به λ برسیم.

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \longrightarrow \tan(2\frac{\lambda}{2}) = \frac{2\tan(\frac{\lambda}{2})}{1-\tan^2(\frac{\lambda}{2})} = \frac{y}{x} \rightarrow y\tan^2(\frac{\lambda}{2}) + 2x\tan\left(\frac{\lambda}{2}\right) - y = 0 \rightarrow$$

ریشه های معادله درجه دو را بدست می آوریم:

$$\tan(\frac{\lambda}{2}) = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2+4y^2}}{2y} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$$ باید جواب مثبت را قبول کرد

$$\tan(\frac{\lambda}{2}) = \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} \rightarrow \lambda = 2\tan^{-1}(\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y})$$

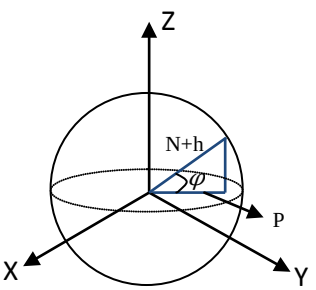
- **محاسبه $\varphi,h$** : برای محاسبه این دو پارامتر دو روش وجود دارد :

۱) روش مستقیم : با بسط به سری تیلور می توان φ را از معادله زیر بدست آورد. (معادله درجه چهار نسبت به φ )

$$P^2\tan^4(\varphi) - 2PZ\tan^3\varphi + (\beta+Z^2)\tan^2\varphi - \frac{2PZ\tan\varphi}{1-e^2} + \frac{Z^2}{1-e^2} = 0$$

۲) روش تکراری: $P$ تصویر بردار $(N+h)$ روی صفحه $x$ و $y$ (استوا) می باشد.

$$Z = (N+h - Ne^2)\sin\varphi$$
$$P = (N+h)\cos\varphi$$




$$\frac{Z}{P} = [1 - \frac{Ne^2}{(N+h)}]\tan\varphi \rightarrow \varphi = \tan^{-1}[\frac{Z}{P}[1 - \frac{Ne^2}{(N+h)}]^{-1}]$$

$$P = \sqrt{x^2+y^2} \qquad h = \frac{P}{\cos\varphi} - N$$

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

شعاع مقطع نصف النهاری

$$N = \frac{a}{(1-e^2\mathrm{Sin}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

شعاع مقطع قائم اولیه

$$R = \sqrt{MN}$$

شعاع متوسط گوس

## تبدیل مختصات از منحنی الخط به مستقیم الخط و برعکس:

$$(\varphi, \lambda, h) \rightleftarrows (x,y,z)$$

اگر از $\varphi$ و $\lambda$ و $h$ به $x$ و $y$ و $z$ برویم این تبدیل را تبدیل مستقیم می گوییم و معکوس آن را تبدیل معکوس می گوییم.

*برای تبدیل مستقیم داریم:*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ (N+h-Ne^2)\sin\varphi \end{pmatrix}$$

*حال تبدیل معکوس را در نظر بگیرید:*

**مراحل کار :** مفروضات *(x,y,z,a,b,p)*

۱. **مقادیر اولیه :**

$$\begin{cases} N_0=a \\ h_0=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \\ \varphi_0 = tan^{-1}\left[\frac{Z}{P}\left[1-\frac{N_0 e^2}{(N_0+h_0)}\right]^{-1}\right] \end{cases}$$

۲. **مراحل تکرار:**

$$N_i = \frac{a}{\left(\cos^2\varphi_{i-1} + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi_{i-1}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$h_i = \frac{p}{\cos\varphi_{i-1}} - N_i$$

$$\varphi_i = tan^{-1}\left[\frac{Z}{P}\left[1-\frac{N_i e^2}{(N_i+h_i)}\right]^{-1}\right]$$

مراحل تکرار تا جایی ادامه پیدا می کند که :

$$|h_i - h_{i-1}| < a * \varepsilon \quad , \quad |\varphi_i - \varphi_{i-1}| < \varepsilon$$

مثلاً : $\varepsilon = 10^5$

**نکته :** $\varepsilon$بر حسب رادیان است و دقتی مناسب برای $h$ که از جنس طول است، نمی باشد بنابراین $a$ ، نصف قطر اطول بیضوی را در آن ضرب کرده تا متناسب با طول باشد.

**تمرین :**

**الف)** با فرض معلومات زیر :

۱. بیضوی رفرنس :

$$\begin{pmatrix} a \\ \frac{1}{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6378207_m \\ 298 \end{pmatrix}$$

۲. مختصات مرکز بیضوی عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.75 \\ 183.25 \\ 142.50 \end{pmatrix}$$

۳. مختصات منحنی الخط ایستگاه زمینی $P$ عبارتست از:

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54^\circ\ 47'\ 12.02''\ \ N \\ 45^\circ\ 32'\ 43.25''\ \ W \\ 285.50_m \end{pmatrix}$$

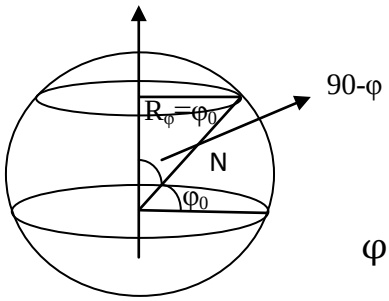
۴. مختصات ماهواره $S$ در سیستم $CT$ در مدار خود (در یک زمان خاص) بصورت زیر می باشد.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5973458.4482 \\ 4247890.2458 \\ -7825979.3475 \end{pmatrix}$$

**ب) محاسبات زیر را انجام دهید:**

۱. مختصات کارتزین $x$ و $y$ و$z$ را برای ایستگاه زمینی $P$ در سیستم $CT$ بر حسب متر محاسبه نمایید.

۲. طول و عرض ژئودتیکی $\varphi$و $\lambda$ ماهواره $S$ را نسبت به بیضوی مشخص شده محاسبه نموده و همچنین ارتفاع موقعیت ماهواره را بدست آورید.




**شعاع اویلر:**

شعاع در یک آزیموت معلوم $\alpha=\alpha_0$

$\varphi = \varphi_0 \qquad R_{\varphi 0}=N\cos\varphi_0$ شعاع در یک مدار خاص

$$\frac{1}{R\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{M} + \frac{\sin^2\alpha}{N}$$ شعاع اویلری

**آزیموت ژئودتیکی (α):**

زاویه بین مقطع قائم در نقطه $P_1$ و گذرنده از نقطه $P_2$ با صفحه نصف النهار ژئودتیکی را آزیموت ژئودتیکی گویند. (نصف النهار ژئودتیکی : صفحه گذرنده از $P_1$ و محور اقصر بیضوی )

در واقع شعاع اویلری برای $\alpha=0$ برابر با $M$ و برای $\alpha=90$ همان $N$ است

$$If\ \alpha=0 \rightarrow \frac{1}{R_\alpha} = \frac{Cos^2\,(0)}{M} + \frac{Sin^2\,(0)}{N} \rightarrow R_\alpha = M$$

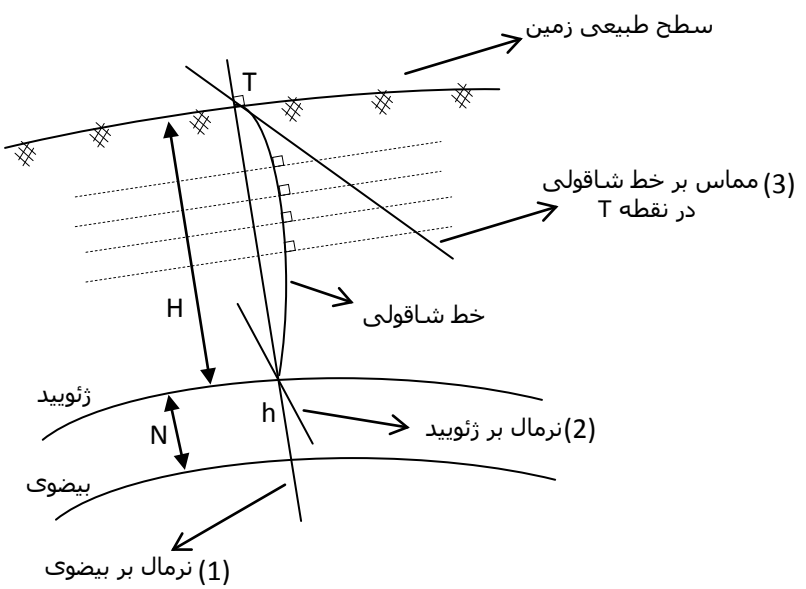
$$If\ \alpha=90 \rightarrow \frac{1}{R_\alpha} = \frac{Cos^2\,(90)}{M} + \frac{Sin^2\,(90)}{N} \rightarrow R_\alpha = N$$

**سطوح مختصات ژئودتیکی:**

۱ -سطوح فیزیکی : (*a*) سطح طبیعی زمین، (*b*) سطح ژئویید.

۲ -سطوح هندسی (ریاضی) : بیضوی ( وجود خارجی ندارد؛ فقط معادله آن موجود می باشد)

* خطوط شاقولی هم انحنا، و هم تاب دارند زیرا سطوح هم پتانسیل موازی نیستند و نسبت به هم شیب های مختلف دارند.




زمانی (*2*) و (*3*) با هم موازی هستند که بتوان از انحنای خط شاقولی صرف نظر کرد.

$h=N+H$

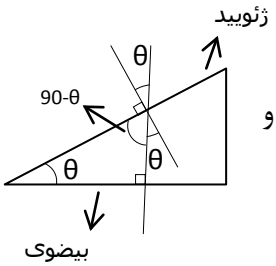
$h$ : ارتفاع ژئودتیکی

$N$ : ارتفاع ژئویید

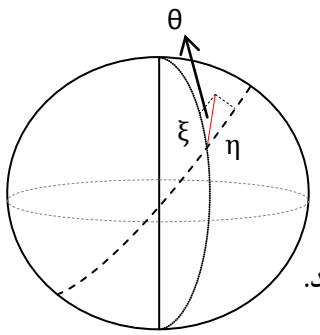
$H$: ارتفاع اورتومتریک

**زاویه انحراف قائم (θ):**

زاویه بین نرمال بر ژئویید و نرمال بر بیضوی که روی ژئویید اندازه گیری می شود. در واقع زاویه θ ، شیب ژئویید نسبت به بیضوی می باشد.




**کِسی (ξ) و اِتا (η)** : زاویه θ بصورت دو خط و یک رأس نیست ، بلکه به صورت فضایی است و این زاویه برای تجزیه کردن و نشان دادن آن بر روی بیضوی ژئودتیکی، یک مولفه آن بر روی نصف النهار و مولفه دیگر آن بر روی قائم اولیه می باشد.
(مانند بردار که به وسیله $x$ و $y$ آن را نشان می دهند)

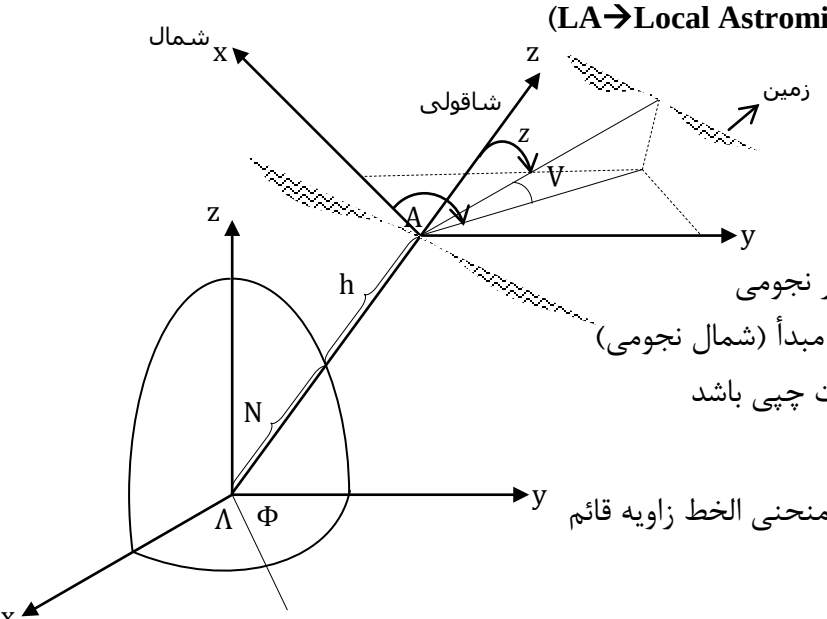



**مولفه های زاویه انحراف قائم:**

- **مولفه نصف النهاری (ξ)** : از تصویر زاویه θ بر روی صفحه نصف النهار ژئودتیکی به وجود می آید.
- **مولفه قائم اولیه (η)** : از تصویر زاویه θ بر روی صفحه قائم اولیه به وجود می آید.

**سیستم های توپوسنتریک**

**۱ –سیستم مختصات نجومی محلی (LA→Local Astromical)**




- مبدأ: روی نقطه مشاهده
- محور $Z$ در راستای خط شاقولی
- محور $X$ محل تقاطع صفحه نصف النهار نجومی با صفحه مماس بر سطح هم پتانسیل در نقطه مبدأ (شمال نجومی)
- محور $y$ به شکلی ست که سیستم دست چپی باشد

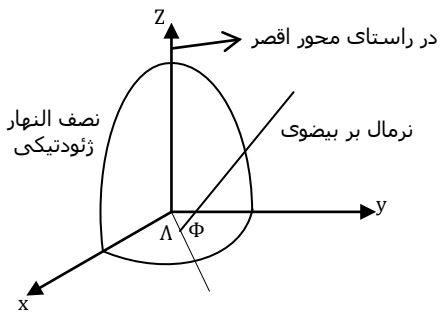
متمم=$Z+V$

مختصات یک نقطه در این سیستم با دو مولفه منحنی الخط زاویه قائم $Z$ و آزیموت نجومی $A$ مشخص می شود.

**(آزیموت نجومی :$A$ زاویه بین صفحه نصف النهار نجومی و صفحه در برگیرنده امتداد قائم و نقطه $P$ )**

## ۲ -سیستم مختصات ژئودتیکی محلی (LG → Local Geodetic)

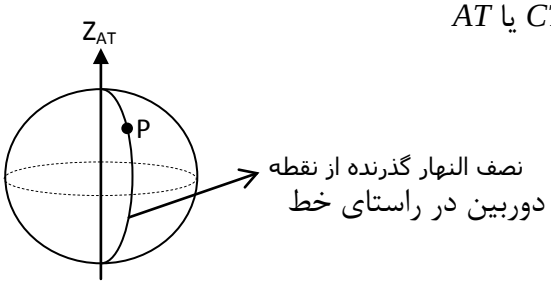
- مبدأ: نقطه ای در امتداد نرمال بر بیضوی ( اکثراً محل تقاطع نرمال بر بیضوی با ژئویید)
- محور $Z$ در راستای نرمال بر بیضوی
- محور $X$ محل تقاطع صفحه نصف النهار ژئودتیکی، با صفحه موازی با صفحه مماس بر بیضوی در نقطه مبدأ
- محور $y$ به شکلی ست که سیستم دست چپی باشد




مختصات یک نقطه در این سیستم با دو مولفه منحنی الخط زاویه قائم $Z'$ و آزیموت ژئودتیکی $\alpha$ مشخص می شود.

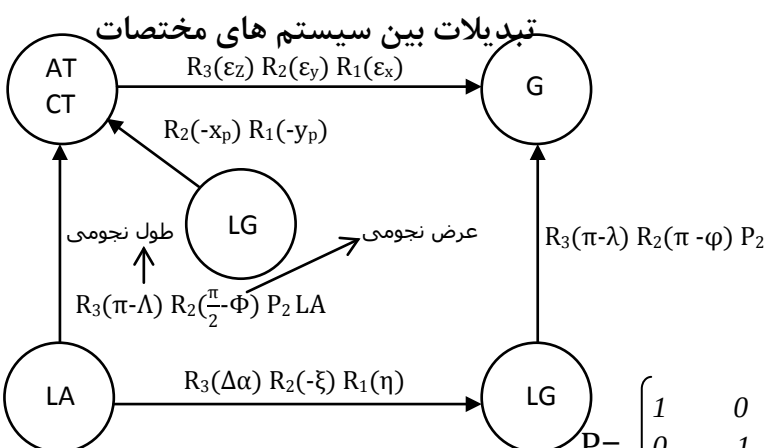
**(آزیموت ژئودتیکی $\alpha$: زاویه بین نصف النهار ژئودتیکی نقطه و صفحه در برگیرنده امتداد نرمال و نقطه $P$ )**

**نصف النهار نجومی:** صفحه گذرنده از یک نقطه و محور $Z$ سیستم $CT$ یا $AT$




نکته: مشاهدات نقشه برداری (با تصحیح تبدیل $IT$ به $CT$) در سیستم $LA$ انجام می گیرد، چون زمان تراز کردن دوربین در واقع محور اصلی دوربین در راستای خط شاقولی قرار می گیرد

### تبدیلات بین سیستم های مختصات




در حالت کلی نمودار زیر را داریم:

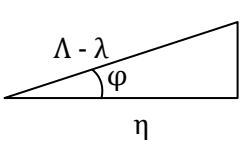
به عنوان نمونه :

$$AT = R_3(\pi-\Lambda)\ R_2(\frac{\pi}{2}-\Phi)P_2\ LA$$

برای تبدیل دست چپی به دست راستی :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اگر فرض کنیم دو سیستم $G$ و $AT$ با هم موازی باشند، می توان روابط زیر را اثبات نمود:




$\Delta\alpha=A-\alpha$

معادلات لاپلاس

$$\begin{cases} \eta = (\Lambda-\lambda)\cos\varphi + \text{جملات اضافی} \\ \Delta\alpha = A-\alpha = (\Lambda-\lambda)\sin\varphi = \eta\tan\varphi \\ \xi = \Phi-\varphi + \text{جملات اضافی} \end{cases}$$

شرط لاپلاسی

**معادلات لاپلاس:**

نشان دهنده روابط بین مقادیر نجومی و ژئودتیکی است، در صورتی که سیستم مختصات ($G$) ژئودتیک و $(CT)$ موازی باشند ( یعنی در صورتی که $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ مساوی صفر باشند) جملات اضافی صفر خواهند بود.

$(\lambda, \varphi, \alpha)$ و $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ کمیت های ژئودتیکی هستند و $A$ (آزیموت نجومی) و $\Lambda$ و $\Phi$ کمیت های نجومی هستند. $\xi$ و $\eta$ نیز مولفه های زاویه انحراف قائم سطحی می باشند.

نکته کنکوری: اعمال شرط لاپلاس در یک نقطه باعث توازی نصف النهار ژئودتیکی و نجومی خواهد شد. ولی برای منطبق شدن این دو صفحه روی هم، شرط لاپلاس را باید در نقاط بیشتری اعمال کرد.

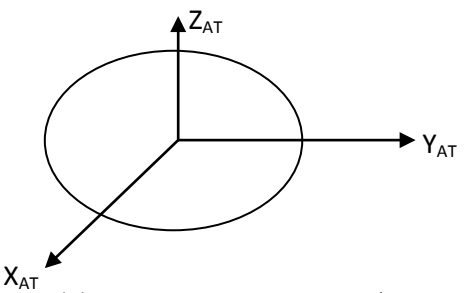
**تعریف دیتوم:**

می توان دو نوع دیتوم داشت :

۱ -**دیتوم ژئوسنتریک :** باید از مشاهدات جهانی استفاده کرد. این دیتوم هشت پارامتر دارد که عبارتند از:

$$(\underbrace{x_0,\ y_0,\ z_0}_{\text{انتقال}},\ \underbrace{\omega_x,\ \omega_y,\ \omega_z}_{\text{دوران}},\ \underbrace{a,\ f}_{\text{شکل و اندازه بیضوی}})$$

((کار مشکلی است و کمتر استفاده می شود))




برای درک بهتر می توانید، دو سیستم سه بعدی کارتزین که یکی مربوط به زمین و دیگری مربوط به بیضوی می باشد را در نظر بگیرید.

**۲ -دیتوم محلی:** برای هر منطقه خاص قابل تعریف است و هشت پارامتر آن عبارتند از:

$$(\varphi_0, \lambda_0, N_0, \Delta\alpha, \xi, \eta, a, f)$$

**نکته :** در مبحث دیتوم، هدف ما اغلب بهبود دادن یک دیتوم موجود است، تا اینکه بخواهیم یک دیتوم جدید را تعریف کنیم.

برای تعریف دیتوم بصورت محلی، نقاط کنترل در سطح منطقه مورد نظر انتخاب شده و مشاهدات ترازیابی دقیق و نجومی در آنها انجام می گیرد. سپس، با داده های بدست آمده و استفاده از روش کمترین مربعات سعی در برقراری یکی از دو شرط زیر می نماییم :

$$\begin{cases} \underset{\min}{f} \rightarrow \oiint_S (\eta^2 + \xi^2)\, ds \\ \underset{\min}{a,f} \rightarrow \oiint_S (N^2)\, ds \end{cases}$$

معادله سطح بیضوی

**تبدیل دیتوم :**

منظور از تبدیل دیتوم، محاسبه مختصات منحنی الخط $\varphi_2, \lambda_2, h_2$ روی یک بیضوی با مشخصات $a_2$ و $f_2$ و با داشتن $\varphi_1, \lambda_1, h_1$ روی یک بیضوی با $a_1$ و $f_1$ می باشد، دو روش وجود دارد:

۱ -استفاده از روش تکرار

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ Z_{01} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (N_1+h_1)\cos\varphi_1\cos\lambda_1 \\ (N_1+h_1)\cos\varphi_1\sin\lambda_1 \\ (N_1+h_1-N_1e_1^2)\sin\varphi_1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{I}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} X_{02} \\ Y_{02} \\ Z_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (N_2+h_2)\cos\varphi_2\cos\lambda_2 \\ (N_2+h_2)\cos\varphi_2\sin\lambda_2 \\ (N_2+h_2-N_2e_2^2)\sin\varphi_2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{II}$$

**مرحله اول** : بدست آوردن $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{AT}$ از معادله $I$ است.

**مرحله دوم** : جایگذاری جواب بدست آمده در معادله $II$ و استفاده از روش تکرار برای محاسبه $\varphi_2, \lambda_2, h_2$ می-باشد.

**مثال: مختصات منحنی الخط را روی کره ای به شعاع ۶۴۰۰۰۰۰ بدست آورید.**

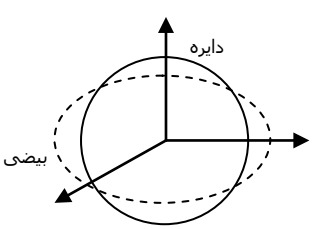
$\varphi_1=45°$ $\qquad$ $a = 6370000m$

$\lambda_1=45°$ $\qquad$ $f = \frac{1}{300}$

$h_1= 8000\ m$

**جواب:**

$$\begin{bmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \\ Z_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{02} \\ Y_{02} \\ Z_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$




$$\begin{cases} f = 1 - \dfrac{b}{a} \\ e^2 = \dfrac{b^2}{a^2} \end{cases} \Rightarrow \quad e^2 = 1-(1-f)^2 \rightarrow e = \sqrt{1-(1-f)^2} = 0.08158$$

$$N_1 \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

* $N$ عددی نزدیک به $a$ باید بدست آید در غیر اینصورت به احتمال زیاد محاسبات اشتباه است.

از رابطه $I$ $\quad \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} 3190712.75 \\ 3190712.75 \\ 4482320.818 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} (R+h_2)\cos\varphi_2 \cos\lambda_2 \\ (R+h_2)\cos\varphi_2 \sin\lambda_2 \\ (R+h_2)\sin\varphi_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(\frac{3190767.525}{3190767.525}) = \tan^{-1}(1) \rightarrow \lambda = 45°$$

چون $N$ هیچ وابستگی ای ندارد، لازم نیست از روش تکرار به دست آید، زمانی از روش تکرار استفاده می کنیم که $N$ وابسته به $e$ باشد.

$$\begin{cases} (R+h_2)\ \mathrm{Cos}\ \varphi_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = y \\ (R+h_2)\ \mathrm{Sin}\ \varphi_2 = z \end{cases} \longrightarrow \frac{z}{y} = \tan\varphi_2\sqrt{2} \longrightarrow \varphi_2 = \tan^{-1}(\frac{z}{y\sqrt{2}})$$

$$\varphi_2 = 44°\ 48'\ 31.39''$$

❖ ملاحظه می شود که ارتفاع پایین تر از کره آمد و منفی شده است. $h_2 = \frac{z}{\sin\varphi_2} - R = -39772.24$

۲ -روش دیفرانسیلی

زمانی که مقادیر نزدیک به هم باشند، با دیفرانسیل گیری می توان به جواب خوبی رسید.

معادلات $I$ و $II$ را از هم کم می کنیم :

$$II - I \rightarrow 0 = \begin{pmatrix} X_{0\,2} - X_{0\,1} \\ Y_{0\,2} - Y_{0\,1} \\ Z_{0\,2} - Z_{0\,1} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix}$$

که ماتریس های $Y$ و $B$ عبارتند از :

(بصورت زیر می توان ماتریس ها را در نرم افزار مطلب وارد کرد)

$$Y = Jacobian\left(\begin{pmatrix} (N+h)\mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Cos}\ \lambda \\ (N+h)\mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ \lambda \\ (N+h-Ne^2)\mathrm{Sin}\ \varphi \end{pmatrix}, [\varphi,\lambda,h]\right) \quad B = Jacobian\left(\begin{pmatrix} (N+h)\mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Cos}\ \lambda \\ (N+h)\mathrm{Cos}\ \varphi\ \mathrm{Sin}\ \lambda \\ (N+h-Ne^2)\mathrm{Sin}\ \varphi \end{pmatrix}, [a,f]\right)$$

به دلیل نزدیکی پارامتر ها به هم، می توان ماتریس های $Y$ و $B$ از تقریب های کروی استفاده کرد.

**تمرین: مثال قبل را از این روش محاسبه کنید.**

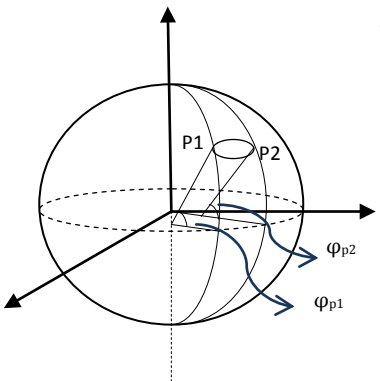
$$\begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix} = Y^{-1}\left\{\begin{pmatrix} dx_0 \\ dy_0 \\ dz_0 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix}\right\}$$

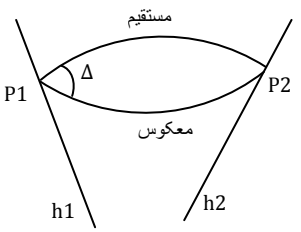
## خم های روی بیضوی :

*فرض کنید دو نقطه روی بیضوی داریم :*

۱ -**مقطع قائم مستقیم ( رفت )** : مقطع قائم در نقطه *P1* که از *P2* بگذرد.

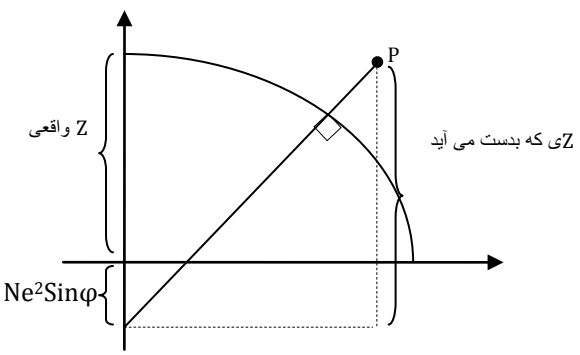
۲ -**مقطع قائم معکوس ( برگشت )** : مقطع قائم در نقطه *P2* که از *P1* بگذرد.




در حالت کلی این دو مقطع روی هم منطبق نمی شوند، مگر در دو حالت زیر:

الف) دو نقطه روی یک مدار باشند ($\varphi_1=\varphi_2$)




$$Z=z_{real} - Ne^2 Sin\varphi$$
$$Z=(N+h-Ne^2)Sin\varphi$$
$$Z=(N+h)Sin\varphi - Ne^2 Sin\varphi$$

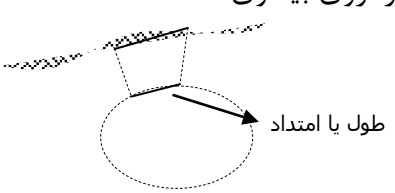
میدانیم خط نرمال بر بیضوی در هر نقطه، محور اقصر را در فاصله $Ne^2Sin\varphi$ قطع می کند. اگر دو نقطه روی یک مدار باشند، طبق فرمول، همدیگر را در یک نقطه روی محور اقصر قطع خواهند کرد. پس این دو خط نرمال با هم متنافر نبوده و در نتیجه مقطع قائم رفت و برگشت بر هم منطبق خواهند شد.

ب) دو نقطه روی یک نصف النهار باشند ($\lambda_1=\lambda_2$)

زمانی که دو نقطه روی یک نصف النهار باشند، $\lambda_1=\lambda_2$ است. در این صورت هر خط نرمال روی یک صفحه قرار گرفته ( همان صفحه نصف النهار) و در نتیجه مقاطع رفت و برگشت روی هم منطبق می شوند.

## تصحیحات

تصحیحات برای تبدیل مشاهدات زمینی به مشاهدات بیضوی انجام می گیرد. یعنی می خواهیم به مشاهدات زمینی، تصحیحاتی اعمال کنیم، تا این مشاهدات بصورتی در آیند که انگار، روی بیضوی مشاهده شده اند.



## انواع تصحیحات

### طولی:

طول مشاهده شده باید به طول روی بیضوی تبدیل گردد، و سپس این طول روی بیضوی به طول ژئودزیک تبدیل شود.

### امتدادی:

۱) *فیزیکی :* مربوط به فیزیک زمین است. در این حالت مشاهدات امتدادی زمینی به مشاهدات امتداد روی بیضوی تبدیل می شود. دلیل این تصحیح آن است که در مشاهدات زمینی، محور اصلی دوربین در راستای خط شاغولی محل ( عمود بر ژئویید) می باشد و در بیضوی در راستای عمود بر بیضوی باید قرار گیرد، که با تصحیح اینکار را انجام می دهیم.۴

۲) *هندسی*

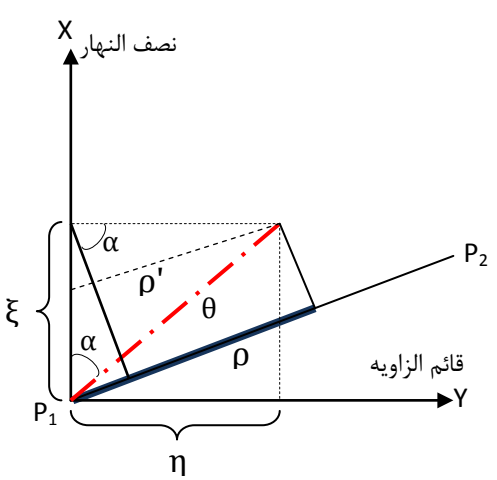
الف) تصحیح به دلیل ارتفاع نقطه قراولروی از بیضوی ( تصحیح تنافر قائم ها)

به دلیل ارتفاع نقطه قراول روی، اصلا مقطع قائم در $P_1$ از $P_2$ نخواهد گذشت و هیچ مقطع قائمی تشکیل نمی شود.

ب) مقطع قائم از لحاظ امتدادی و طولی به ژئودزیک تبدیل می شود.

### تصحیح فیزیکی

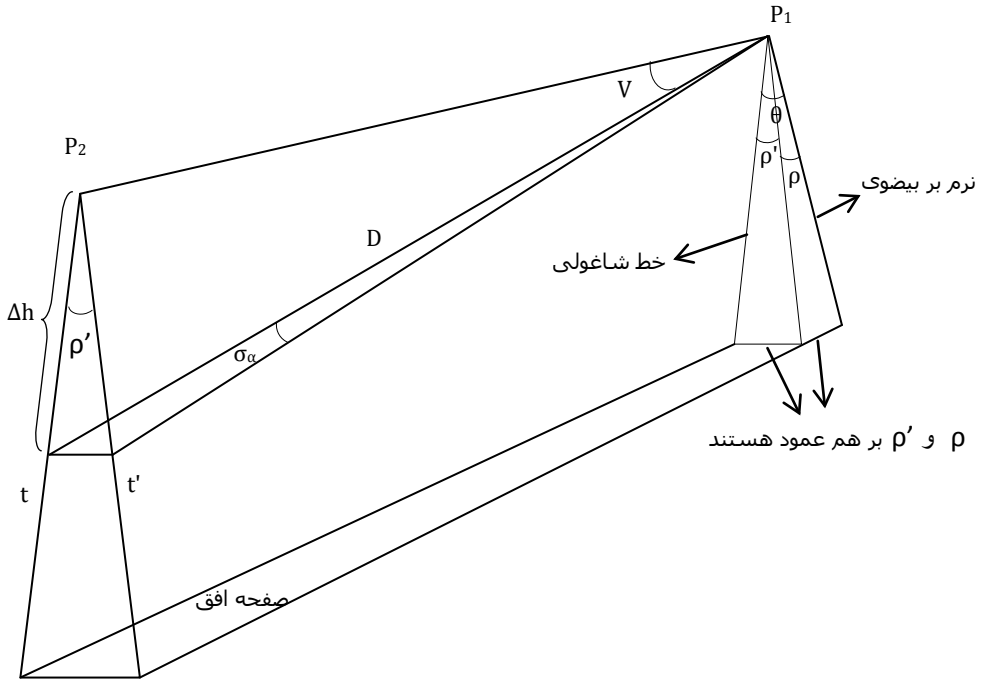
در نتیجه منطبق نبودن عمود بر بیضوی و سطح هم پتانسیل، قرائت های امتدادی باید طوری تصحیح گردند که فرض شود هنگام تراز کردن دوربین، دوربین روی سطح بیضوی قرار گرفته است. از رابطه زیر می توان در قسمت های قبل استفاده نمود. که در آن $\sigma_1$ خطای تراز در راستای صفحه عمود بر صفحه قراولروی می باشد. بنابراین می توان گفت تصحیح زاویه افقی در راستای صفحه عمود بر قراولروی و تصحیح زاویه قائم در راستای صفحه قراولروی، واقع است. ابتدا مقدار زاویه انحراف قائم را روی صفحه قراولروی و نیز روی صفحه عمود بر قراولروی بدست میآوریم.




$$\rho = \eta \sin(\alpha) + \xi \cos(\alpha)$$

$$\rho' = \xi \sin(\alpha) - \eta \cos(\alpha)$$

با بدست آمدن ρ و ρ' می توان از روی شکل زیر مقدار تصحیحات فیزیکی را به دست آورد.




$P_2P_1t : \Delta h = D.\tan(v)$ (1)

$tt'P_1 : tt' = D(\sigma_d) \longrightarrow D = \frac{tt'}{\sigma_\alpha}$ (2) $\longrightarrow$

$P_2tt' : tt' = (\Delta h)\rho'$ (3)

(2) * (3) $D = \frac{(\Delta h)\rho'}{\sigma_d}$ (4)

(1) * (4) $\Delta h = \frac{(\Delta h)\rho'}{\sigma_d}\tan(v) \longrightarrow \sigma_d = \rho' \tan(v)$

$\longrightarrow \sigma_d = \rho' \tan(v) = (\xi \sin(\alpha) - \eta \cos(\alpha)) \tan(v)$

$\sigma_d$ : مقدار تصحیح فیزیکی روی امتداد افقی

سئوال کنکور: مقدار تصحیح امتداد افقی به چه چیزی هایی بستگی دارد؟

جواب : به چهار عامل $\xi$ و $\eta$ و زاویه ارتفاعی ($v$) و آزیموت ($\alpha$)

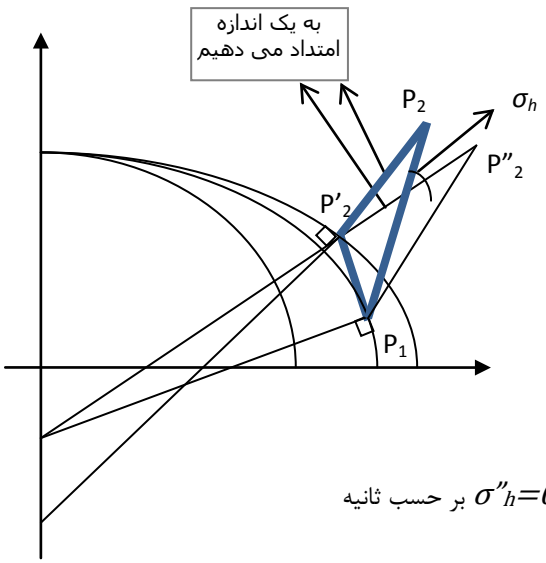
* نکته: مقدار تصحیح زاویه ارتفاعی همان اندازه (ρ) می باشد.

$$\rho = \xi \cos(\alpha) + \eta \sin(\alpha)$$

## تصحیح هندسی

تصحیح تنافر قائم ها ( تصحیح ارتفاعی $\sigma_h$ )

برای راحتی، دو نقطه $p_1$ و $p_2$ یک اختلاف ارتفاع دارند.




می توان رابطه آن را به صورت زیر نوشت:

$$\sigma''_h=0.11''(\frac{\Delta h}{1000})sin(2\alpha)Cos^2\varphi$$ بر حسب ثانیه

- در این رابطه می توان به جای $\Delta h$ از اختلاف ارتفاع اورتومتریک استفاده کرد.
- در شبکه های ژئودزی درجه یک استفاده می شود.
- اگر $P_2$ در شمال شرقی و یا جنوب غربی $P_1$ باشد، مقدار تصحیح، مثبت و در غیر این صورت، منفی می باشد

**مهم کنکوری:**

۱. **$P_2$ در شمال شرقی نقطه $P_1$:** آزیموت $0<\alpha<90$ و $0<2\alpha<180$ و sin مثبت است و در نتیجه $\sigma_h$ مثبت است.

۲. **$P_2$ در جنوب غربی نقطه $P_1$:** آزیموت $180<\alpha<270$ و $360<2\alpha<540$ و sin مثبت است و در نتیجه $\sigma_h$ مثبت است.

۳. در دو ربع بعدی، منفی است.

**مثال:** مقدار $\sigma_h$ را برای حالت زیر محاسبه کنید:

$h_1=0$ $h_2=3000$ $\varphi_1=45°$ $\varphi_2=45°\ 10'\ 00''$ $\lambda_1=50°$ $\lambda_2=50°$

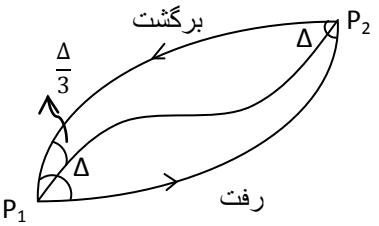
الف) $0.2''$ ب) $-0.2''$ ج) $0$ د) $0.33''$

چون $\varphi_1$ و $\varphi_2$ در یک مدار هستند، در نتیجه نیازی به تصحیح نیست، در نتیجه گزینه (ج) صحیح می باشد.

**تصحیح ژئودزیک :**

در این تصحیح به جای مقطع قائم رفت و برگشت ( که بر هم منطبق نیستند )، از امتداد ژئودزیک استفاده می شود.

**تعریف ژئودزیک :** خمی است که نرمال در هر نقطه منطبق بر نرمال بر بیضوی در آن نقطه باشد.این خم کوتاهترین فاصله بین دو نقطه را دارد و می توان معادله خم ژئودزیک را بصورت زیر نوشت:




$$y\ dx - x\ dy = N\cos(\varphi, \sin(\alpha)\ ds$$

**معادله یک خم بر اساس طول قوس :**

$$\begin{aligned} x &= f(s) \\ y &= g(s) \\ z &= h(s) \end{aligned} \longrightarrow \frac{d^2 f}{dx^2}$$

مثلا معادله نرمال بر بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$ معادله بیضی

$$\left(\frac{2x}{a}, \frac{2y}{a}, \frac{2z}{b}\right)$$ نرمال بر بیضی

$$\sigma_g'' = \frac{\Delta''}{3} = 206265 * \left(\frac{1}{12} e^2 s^2 \cos^2(\varphi_m) \sin(2\alpha)\right) / N^2 m$$ تصحیح ژئودزیک

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \qquad N_m = \frac{N_1 + N_2}{2}$$

نکته: طول ژئودزیک و مقطع قائم رفت و برگشت، خیلی نزدیک به هم می باشد.

$$\Delta S = \frac{a e^4}{360} \sin^2(2\alpha) \cos^4(\varphi_m) S^5$$

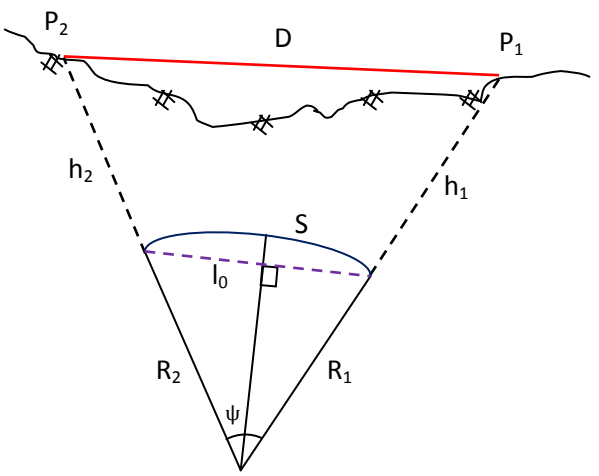
تصحیح طولی برای تبدیل طول به ژئودزیک
طول کمان روی بیضوی(طول ژئودزیک) : S

چون $\Delta S$ کوچک می شود، همان طول روی ژئودزی کافی است.

**تصحیحات طولی :**

۱) تصحیح به طول ژئودزیک: میتوان به دلیل کوچک بودن این تصحیح از آن صرف نظر کرد.

۲) تصحیح طول مشاهده شده زمینی به طول کمان روی بیضوی.




$$D^2=(R+h_1)^2+(R+h_2)^2-2(R+h_1)(R+h_2)\cos\psi \ *$$

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{\psi}{2}+\frac{\psi}{2}\right)=\cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}-\sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\psi}{2}=\cos^2\frac{\psi}{2}-\sin^2\frac{\psi}{2}=\left(1-\sin^2\frac{\psi}{2}\right)-\sin^2\frac{\psi}{2}=1-2\sin^2\frac{\psi}{2}$$

$$l_0=2R\sin\frac{\psi}{2}$$

$$D^2=(R+h_1)^2+(R+h_2)^2-2(R+h_1)(R+h_2)+4(R+h_1)(R+h_2)\sin^2\frac{\psi}{2}$$

$$D^2=R^2+{h_1}^2+2Rh_1+R^2+{h_2}^2+2Rh_2-2R^2-2Rh_2-2Rh_1-2h_1h_2+\left(2R\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right)^2\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\left(1+\frac{h_2}{R}\right)$$

این تصحیح کاملا ضروری می باشد
$\Psi$ بر حسب رادیان است

$$D^2=({h_1}^2-{h_2}^2)+{l_0}^2\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\left(1+\frac{h_2}{R}\right)$$

$$l_0=\sqrt{\frac{D^2-(\Delta h)^2}{\left(1+\frac{h_1}{R}\right)\left(1+\frac{h_2}{R}\right)}}$$

این تبدیل لازم است

$$S=R\psi=R\left(2\sin^{-1}\left(\frac{l_0}{2R}\right)\right)\rightarrow S=2R\sin^{-1}\left(\frac{l_0}{2R}\right)$$

# فصل دوم : محاسبات مختصات روی بیضوی

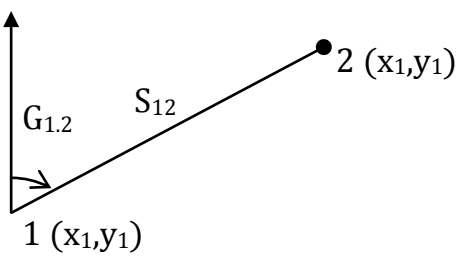
**محاسبات مختصات روی بیضوی:**

بعد از تصحیح مشاهدات و بردن آنها روی بیضوی حال می بایست مختصات را با این مشاهدات بدست آورد.

در حالت نقشه برداری مسطحاتی داریم:

**مسأله مستقیم :**

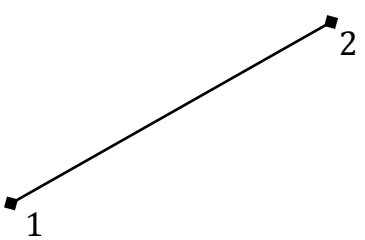
با داشتن طول و ژیزمان و یک نقطه ثبات بتوانیم مختصات و طول ژیزمان نقطه دوم را بدست آوریم:




$$(x_1,y_1, G_{1.2},S_{1.2}) \rightarrow (x_1,y_1, G_{2.1})$$

**مسأله معکوس :**

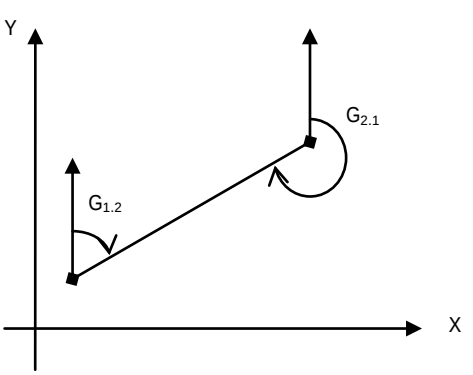
با داشتن مختصات دو نقطه ثبات بتوانیم طول و ژیزمان بین دو نقطه را بدست آوریم:



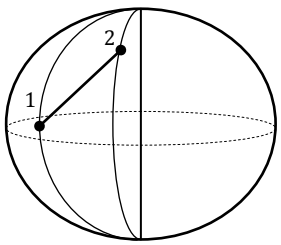

$$(x_1,y_1, x_2,y_2) \rightarrow (S_{1.2}, G_{1.2})$$

در حالت نقشه برداری مسطحاتی داریم :

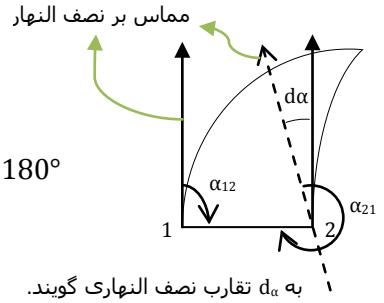
در حالت صفحه $G_{1.2}=G_{2.1}\pm180°$



اگر بیضوی داشته باشیم :




$$\alpha_{12}=\alpha_{21}\pm180^\circ+d_\alpha\rightarrow\alpha_{12}-\alpha_{21}\neq180^\circ$$




**تعریف می کنیم:**

$$\alpha_m=\frac{\alpha_{12}\pm180+\alpha_{21}}{2}$$ آزیموت متوسط در حالت مسطحاتی (در کوپل)

$$\alpha_m=\frac{\alpha_{12}\pm180+\alpha_{12}\mp180+d_\alpha}{2}\rightarrow\alpha_m=\alpha_{12}+\frac{d_\alpha}{2}$$ آزیموت متوسط

دو روش برای محاسبه مختصات روی بیضوی معرفی می کنیم. در هر روش مسأله مستقیم و معکوس بصورت زیر است.

$(\varphi_1,\lambda_1,S_{12},\alpha_{12})\rightarrow(\varphi_2,\lambda_2,\alpha_{21})$ مستقیم

گاهی $\alpha_{21}$ از مسأله معکوس محاسبه می شود

$(\varphi_1,\lambda_1,\varphi_2,\lambda_2)\rightarrow(S_{12},\alpha_{12})$ معکوس

**روش گاوس:**

از تقریبات کروی استفاده می کند و برای عرضهای $-80<\varphi<80$ و طول های کمتر از *40km* کاربرد دارد. اگر غیر از این باشد، دقت خوبی نمی دهد. مسأله مستقیم گاوس به صورت تکراری، و مسأله معکوس بصورت غیر تکراری حل می شود.

**روش پواسن:**

از تقریبات کروی استفاده می کند. برای تمامی عرض ها مناسب است ولی طولها باید کمتر از *100km* باشد. هم مسأله مستقیم و هم مسأله معکوس، غیر تکراری حل می شوند.

**مسئله مستقیم گاوس:**

از چهار رابطه زیر به صورت تکراری استفاده می کند:

1) $d\alpha=(d_\lambda)\sin\varphi_m$

2) $d_\varphi=\frac{S_{12}\cos(\alpha_m)}{M_m}$

3) $d_\lambda=\frac{S_{12}\,Sin\,(\alpha_m)}{N_m\,Cos\,(\varphi_m)}$

4) $\alpha_m=\alpha_{12}+\frac{d_\alpha}{2}$ و $\alpha_{21}=\alpha_{12}+180+d_\alpha$

مسأله مستقیم $(\varphi_1,\lambda_1,S_{12},\alpha_{12})\rightarrow(\varphi_2,\lambda_2,\alpha_{21})$

ابتدا از رابطه ۲، $d_\alpha$ را بدست می آوریم بعد با جایگذاری $\alpha_{12}$ بجای $\alpha_m$ و $M_1$ بجای $M_m$، $d_\varphi$ بدست می آید و سپس از رابطه $\varphi_2=\varphi_1+d\varphi$ ، مقدار $\varphi_2$ محاسبه می شود. از رابطه ۳ مقدار $d_\lambda$ با جایگذاری $\alpha_{12}$ بجای $\alpha_m$ و $N_1$ بجای $N_m$ بدست می آید و سپس از $\lambda_2=\lambda_1+d_\lambda$ محاسبه می شود.

از رابطه ۱ میتوان $d_\alpha$ را بدست آورد چون $\varphi_m=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ و $d_\lambda=\lambda_2-\lambda_1$ از رابطه چهار می توان $\alpha_m$ را نیز به دست آورد.این مراحل تا زمانی که اختلاف $|d\varphi_{n}-d\varphi_{n-1}|$ و $|d\lambda_n-d\lambda_{n-1}|$ کمتر از حد دقت گردد ادامه خواهد یافت.

**مسئله معکوس گاوس :**

$(\varphi_1,\lambda_1,\varphi_2,\lambda_2)\rightarrow(S_{12},\alpha_{21})$

1) $d\alpha=(d_\lambda)\sin\varphi_m$ $\quad\varphi_2=\varphi_1+d_\varphi$ $\quad\alpha_m=\alpha_{12}+\frac{d\alpha}{2}$

2) $d_\varphi=\frac{S_{12}\cos(\alpha_m)}{M_m}$ $\quad\lambda_2=\lambda_1+d_\lambda$ $\quad\alpha_{21}=\alpha_{12}+180+d\alpha$

3) $d_\lambda=\frac{S_{12}\,Sin\,(\alpha_m)}{N_m\,Cos\,(\varphi_m)}$

از رابطه ۱ میتوان $d\alpha$ را بدست آورد چون، $d_\lambda=\lambda_2-\lambda_1$ و $\varphi_m=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ استفاده کنیم.

برای بدست آوردن $\alpha_m$ از تعمیم شماره های $\frac{3}{2}$ استفاده می شود :

$$\frac{d_\lambda}{d_\varphi}=\frac{(M_m)\sin(\alpha_m)}{(N_m)\cos(\varphi_m)\cos(\alpha_m)}=\tan\alpha_m\frac{M_m}{(N_m)\cos(\varphi_m)}\Rightarrow\alpha_m=\tan^{-1}\left(\frac{d_\lambda}{d_\varphi}\frac{(N_m)\cos(\varphi_m)}{M_m}\right)$$

از رابطه ۴ می توان $\alpha_{12}=\alpha_m-\frac{d\alpha}{2}$ را بدست آورد.

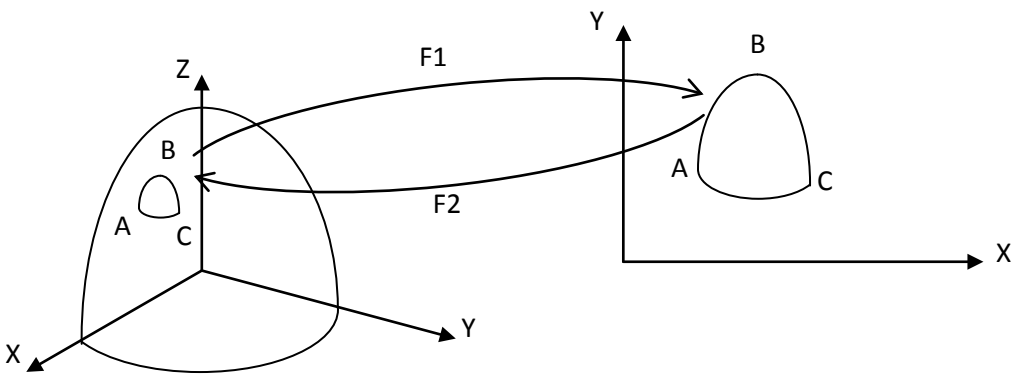
برای محاسبه $S_{12}$ از رابطه ۲ یا ۳ می توان برای محاسبه $S_{12}$ استفاده کرد.

$$S_{12}=\frac{M_m\,(d_\varphi)}{Cos\,\alpha_m}$$

# فصل سوم : سیستم های تصویر

**سیستم های تصویر متشابه :**

سیستم تصویر متشابه، تصویری از یک شکل هندسی روی بیضوی به روی یک صفحه می باشد؛ بطوری که زوایای شکل در حالت دیفرانسیلی ثابت بماند. در این بین امکان دارد با اعمال شرط تشابه، اعوجاجاتی در طول و مساحت به وجود آید. برای بیان ریاضی این سیستم تصویر از اعداد مختلط استفاده می شود.




این بار هم دو مسئله داریم:

مسئله مستقیم :

محاسبه $x$ و $y$ با داشتن $\varphi$و $\lambda$

$$(x+iy)=f1(\varphi+i\lambda)$$

مسئله معکوس

محاسبه $\varphi$و $\lambda$ با داشتن $x$و $y$

$$(\varphi+i\lambda)=f2(x+iy)$$

**مروری بر اعداد مختلط:**

اگر $Z_1$ و $Z_2$ دو عدد مختلط باشند داریم:

$Z_1=(x+iy_1)$ ; $i=\sqrt{-1}$ و $Z_2=(\underbrace{x_2}_{\text{قسمت حقیقی}}+i\underbrace{y_2}_{\text{قسمت موهومی}})$ ; $i=\sqrt{-1}$

$Z_1+Z_2=(x_1+x_2)=i(y_1+y_2)$

$Z_1.Z_2=(x_1+i\,y_1)(x_2+i\,y_2)=x_1\,x_2+i\,x_1\,y_2+i\,y_1\,x_2+(i)^2\,y_1\,y_2=(x_1\,x_2-y_1\,y_2)+(i\,x_1\,y_2+y_1\,x_2)$

مزدوج عدد مختلط $\bar{Z}_1=x_1-iy_1$

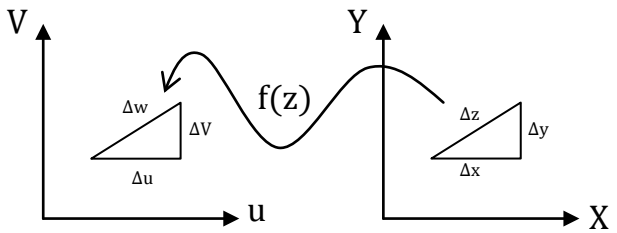
مشابه توابع حقیقی مثل $y=f(x)=x+3$ برای اعداد مختلط نیز، تابع تعریف می شود:

$w=f(z)=z+4$

می توان تابع مختلط را به صورت زیر نوشت:

$w=f(z)=u(x,y)+iV(x,y)$
$w=f(z)=z+4=x+iy+4=(\underline{x+4})+iy$

برای درک توابع مختلط شکل زیر را در نظر بگیرید:




مشتق توابع مختلط :

$y=f(x)$

$$f'(x)= lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$y=f(x)=x^2$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{(\Delta x)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2(\Delta x)(x)+(\Delta x^2-x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x$$

$W=f(z)$

$$f'(z) = lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x+\Delta y} \to \begin{cases} \Delta u=\Delta u(x,y)=(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y) \\ \Delta v=\Delta v(x,y)=(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y) \end{cases}$$

*چون تابع ما بر حسب* x *و* y *است باید نسبت به هردو پارامتر، مشتق گیری شود :*

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+i(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

با تقسیم صورت و مخرج بر $\Delta x$ :

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)+i(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x})}{1+i\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

می دانیم که:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\text{در حالت دیفرانسیلی می تواند تبدیل شود به}} \frac{\partial y}{\partial x} = m \text{ شیب خط} \to$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}m\right)+i(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}m)}{1+im} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)m}{1+im}$$

*نکته: اگر دقت کنید در می یابید که این مشتق به جهت (شیب) وابسته است. برای از بین بردن این وابستگی، ابتدا مقدار مشتق را در جهت عمود بر هم $m=0$ و $m=\infty$ مساوی قرار می دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} m=0 \rightarrow f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \\ m=\infty \rightarrow f(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} & \text{(I)} \\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} & \text{(II)} \end{array}\right.$$

طرفین را در یک $i$ ضرب می کنیم، چون شیب بی نهایت می شود، فقط ضریب ها حساب می شوند.

به این دو شرط، شرط کوشی – ریمان گفته می شود. برای اثبات این که مشتق در تمام جهات ثابت است، دوباره از رابطه های $I$ و $II$ مشتق خواهیم گرفت :

$$\frac{\partial(I)}{\partial x}\rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} \qquad \frac{\partial(II)}{\partial x}\rightarrow\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{\partial(I)}{\partial y}\rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial(II)}{\partial y}\rightarrow\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \nabla^2(U)=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \qquad \nabla^2(V)=0$$

لاپلاسین

می دانیم که اگر لاپلاسین یک تابع صفر شود، نشان دهنده آن است که مشتق به جهت وابسته نیست، و از آنجاییکه $f(z)=\frac{\partial w}{\partial z}$ همان ضریب مقیاس است، پس ضریب مقیاس به جهت وابسته نیست. به چنین کمیتی ایزوتروپیک گفته می شود. در تصاویر متشابه، *scale factor* کمیتی ایزوتروپیک(*Isotropic*) است.

**مروری بر هندسه دیفرانسیل :**

می توان معادله ضمنی هر سطح را به صورت یک تابع $f(x,y,z)$ نوشت، ضمنا می توان پارامترهای $x,y,z$ را نیز بدست آورد. مثلا برای یک کره داریم:

معادله کره $x^2+y^2+z^2-R=0$

کره $\left\{\begin{array}{l} x=R\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ y=R\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ z=R\sin(\varphi) \end{array}\right.$

معادله بیضی $x^2+y^2+z^2-N^2=0$

بیضی $\left\{\begin{array}{l} x=N\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ y=N\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ z=N(1-e^2)\sin(\varphi) \end{array}\right.$

می توان معادله هر خم را روی هر سطحی به دست آورد. مثلا معادله خم نصف النهاری و مداری برای یک بیضوی به صورت زیر است:

$$F(\varphi,\lambda_0)\begin{cases} x=N\cos(\varphi)\cos(\lambda_0) \\ y=N\cos(\varphi)\sin(\lambda_0) \\ z=N(1-e^2)\sin(\varphi) \end{cases}$$

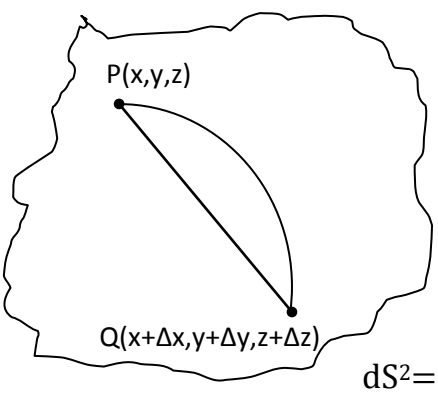
معادله خم نصف النهاری

$$F(\varphi_0,\lambda)\begin{cases} x=N\cos(\varphi_0)\cos(\lambda) \\ y=N\cos(\varphi_0)\sin(\lambda) \\ z=N(1-e^2)\sin(\varphi_0) \end{cases}$$

معادله خم مداری

**کمیت های اصلی گاوس :**

از این کمیت ها برای بیان خاصیت های هندسی هر سطح مانند طول، ضریب مقیاس و زاویه بین خم های روی سطح استفاده می شود.کمیت های اصلی گاوس وسیله ای هستند برای بیان خواص هندسی سطحی که می باید بر روی صفحه یا سطح دیگری تصویر شوند.مطابق شکل زیر اگر یک خم داشته باشیم :




طول وتر $PQ$ برابر است با

$$\Delta S^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2 \longrightarrow 1=\left(\frac{\Delta x}{\Delta S}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta S}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta S}\right)^2$$

اگر نقطه $Q$ به حد کافی به نقطه $P$ نزدیک شود، طول وتر را میتوان با طول کمان $PQ$ برابر گرفت.

$$dS^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

x و y و z تابعی از $(\varphi,\lambda)$

$$dx=\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)d\lambda+\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)d\varphi$$

$$dy=\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)d\lambda+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)d\varphi \longrightarrow$$

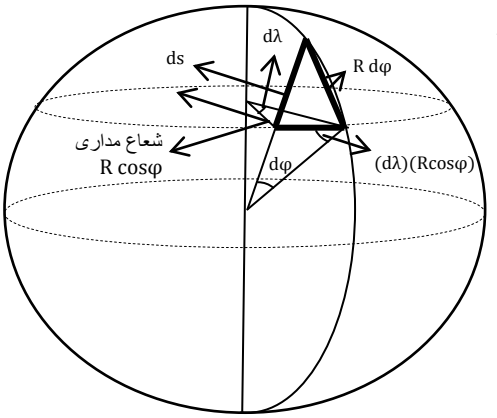
$$dz=\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)d\lambda+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)d\varphi$$

$$dS^2=\left(\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2\right)d^2\lambda+\left(\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2\right)d^2\varphi+\left(\frac{dx}{d\lambda}\frac{dx}{d\varphi}+\frac{dy}{d\lambda}\frac{dy}{d\varphi}+\frac{dz}{d\lambda}\frac{dz}{d\varphi}\right)2d\lambda d\varphi \longrightarrow$$

$$dS^2=Ed^2\lambda+Gd^2\varphi+2f\,d\lambda\,d\varphi \xrightarrow{\text{شکل ماتریسی آن}} dS^2=[d\lambda \quad d\varphi]\begin{bmatrix} F & E \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d\lambda \\ d\varphi \end{bmatrix}$$

*به F و G و E کمیت های اصلی گاوس گویند.*

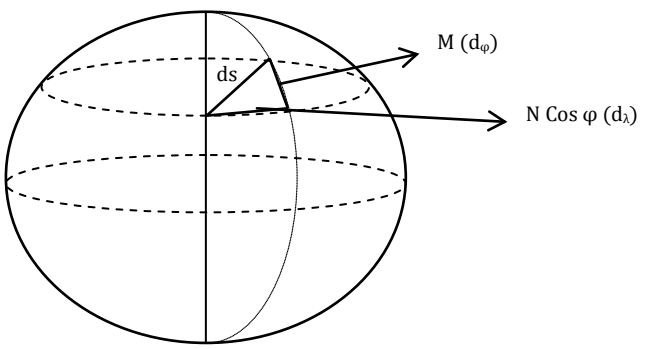
مثال) کمیت های اصلی گاوس را برای کره ای به شعاع $R$ محاسبه کنید.




$x=R\cos(\varphi)\cos(\lambda)$
$y=R\cos(\varphi)\sin(\lambda)$
$z=R\sin(\varphi)$

$E=(-R\cos(\varphi)\sin(\lambda))^2+(R\cos(\varphi)\cos(\lambda))^2+(0)^2=R^2\cos^2(\varphi)$
$G=(-R\sin(\varphi)\cos(\lambda))^2+(-R\sin(\varphi)\sin(\lambda))^2+(R\cos(\varphi))^2$
$G=R^2\sin^2(\varphi)+R^2\cos^2(\varphi)=R^2$
$F=(-R\cos(\varphi)\sin(\lambda))(-R\sin(\varphi)\cos(\lambda))+(-R\sin(\varphi))$
$\sin(\lambda))(R\cos(\varphi)\cos(\lambda))+(R\cos(\varphi))(0)=0$
$dS^2=R^2\cos^2\varphi\ (d^2\lambda)+R^2 d\varphi$

مثال) کمیت های اصلی گاوس را برای یک بیضوی به دست آورید.




$$ds^2=M^2(d\varphi)^2+N^2\cos^2(\varphi)d\lambda^2$$

**زاویه بین مدارات و نصف النهارات:**

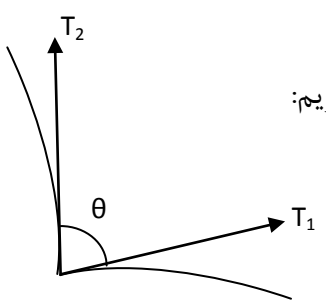
یادآوری :

اگر $T_1(j_1,k_1,l_1)$ و $T_2\ (j_2,k_2,l_2)$ بردارهای مماس یکه باشند، زاویه بین آنها برابر است

با :

$$T_1.T_2=\|T_1\|\|T_2\|\cos\theta\ \rightarrow J_1J_2+k_1k_2+l_1l_2=\cos\theta$$

اگر دو منحنی به صورت زیر تصویر شده باشند، داریم :




حال اگر این دو منحنی همان مدارات و نصف النهار روی یک بیضوی باشند داریم:

مدار $\begin{cases}X(\varphi,\lambda)\\Y(\varphi,\lambda)\\Z(\varphi,\lambda)\end{cases}$ $\begin{cases}X(\varphi_0,\lambda)\\Y(\varphi_0,\lambda)\\Z(\varphi_0,\lambda)\end{cases}$ نصف النهار $\begin{cases}X(\lambda)\\Y(\lambda)\\Z(\lambda)\end{cases}$ $\begin{cases}X(\varphi)\\Y(\varphi)\\Z(\varphi)\end{cases}$

از طرف دیگر طول یک خم مداری و نصف النهاری بصورت زیر است:

$dS^2=E(d\lambda)^2+2f(d\varphi)(d\lambda)+G(d\varphi)^2$ طول بر روی خم دلخواه

1) $dS^2=E(d\lambda)^2 \rightarrow \frac{d\lambda}{dS_\varphi}=\frac{1}{\sqrt{E}}$ ⟶ خم مداری

2) $dS^2\lambda=G(d\varphi)^2 \rightarrow \frac{d\varphi}{ds_\lambda}=\frac{1}{\sqrt{G}}$ ⟶ خم نصف النهاری

می دانیم بردار مماس از رابطه زیر بدست می آید:

مدار $\begin{cases} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{T1} = (\frac{dx}{ds_\varphi}, \frac{dy}{ds_\varphi}, \frac{dz}{ds_\varphi}) \rightarrow (1)$

نصف النهار $\begin{cases} x(\varphi) \\ y(\varphi) \\ z(\varphi) \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{T2} = (\frac{dx}{ds_\lambda}, \frac{dy}{ds_\lambda}, \frac{dz}{ds_\lambda}) \rightarrow (2)$

$$(1) \rightarrow (\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{ds_\varphi}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{ds_\varphi}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{ds_\varphi})$$

$$(2) \rightarrow (\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{ds_\lambda}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{ds_\lambda}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{ds_\lambda})$$

$$T_1 = (\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{1}{\sqrt{E}}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{1}{\sqrt{E}}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{1}{\sqrt{E}})$$

$$T_2 = (\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{1}{\sqrt{G}}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{1}{\sqrt{G}}, \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{1}{\sqrt{G}})$$

$$\rightarrow [\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \varphi}]\frac{1}{\sqrt{GE}} = cos(\theta) \rightarrow cos\,\theta = \frac{f}{\sqrt{GE}}$$

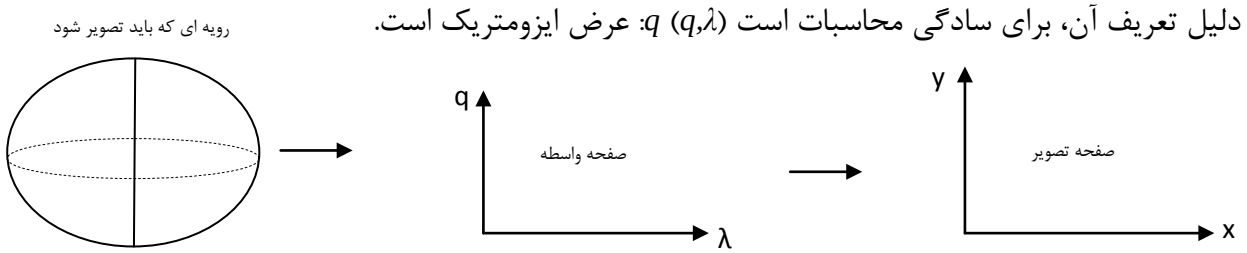
با این حساب برای بیضوی و کره داریم:

$F=0 \longrightarrow \theta=90 \rightarrow Cos(\theta) = 0$ یعنی مدارات و نصف النهارات بر هم عمودند

**معرفی صفحه ایزومتریک :**

صفحه ایزومتریک، واسطه ایست بین صفحه تصویر (صفحه نقشه) و بیضی.

دلیل تعریف آن، برای سادگی محاسبات است $q\ (q,\lambda)$: عرض ایزومتریک است.




تعریف $q$ از آنجا ناشی می شود که داریم:

$$dS^2 = M^2 d\varphi^2 + N^2\, Cos^2\,(\varphi)\, d\lambda^2 \xrightarrow[\text{فاکتورگیری از } N^2Cos^2(\theta)]{} N^2 Cos^2(\theta)\ [d\lambda^2 + \frac{M^2}{N2Cos2(\theta)} d\varphi^2]$$

بافرض : $dq^2 = \frac{M^2}{N^2 Cos^2\varphi} d\varphi^2 \rightarrow dq = \frac{M}{Ncos\varphi} d\varphi$

برای بدست آوردن $q$ باید انتگرال گیری کرد:

$$q = \int_0^\varphi \frac{M}{N} Sec\,(\varphi) d\varphi$$

در نهایت $q = Ln\left|Tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-e\,sin\varphi}{1+e\,sin\,\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}\right|$

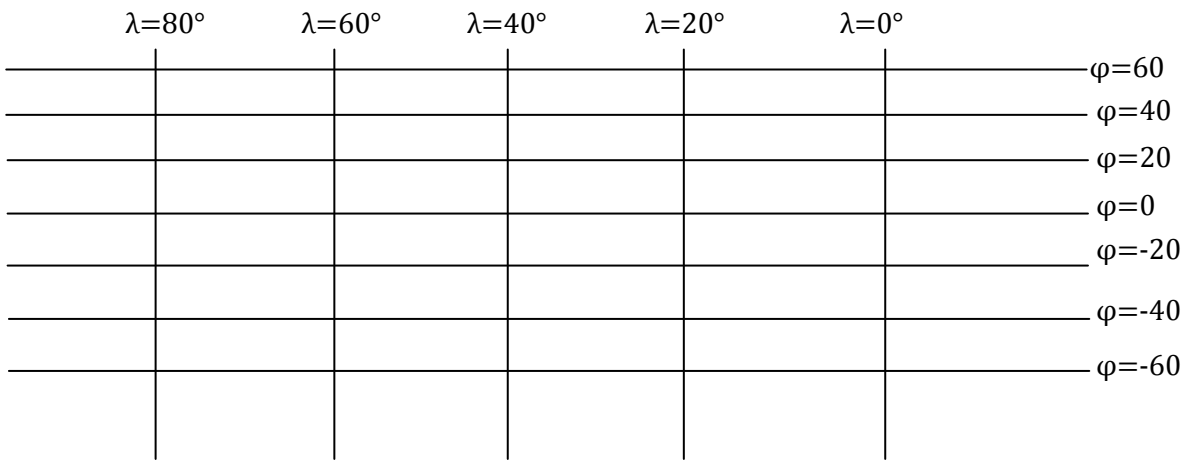
اگر به ازای $\varphi$، مقادیر را محاسبه کنید، ملاحظه می کنید که : مقدار $\varphi$ از صفر تا $11°$ ، دارای $q$ کوچکتر از $\varphi$ بوده و از $12°$ به بعد، مقدار $q$ ، بزرگتر از $\varphi$ می شود.

پس در صفحه ایزومتریک نصف النهارات با فاصله یکسان ولی مدارات با فواصلی که رفته رفته بزرگتر می شوند، تصویر می شود.

اگر $\varphi$ مثبت باشد، $q$ بدست آمده مثبت است و اگر φ منفی باشد، $q$ بدست آمده منفی میشود.

$\varphi \rightarrow -\varphi$

$$q= Ln\left|\left(\sqrt{\frac{1+sin\varphi}{1-sin\,\varphi}}\right)\left(\frac{1-e\,sin\varphi}{1+e\,sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}\right| \rightarrow Ln\left|\left(\sqrt{\frac{1+sin\,\varphi}{1-sin\,\varphi}}\left(\frac{1-e\,sin\,\varphi}{1+e\,sin\,\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}\right)^{-1}\right|$$



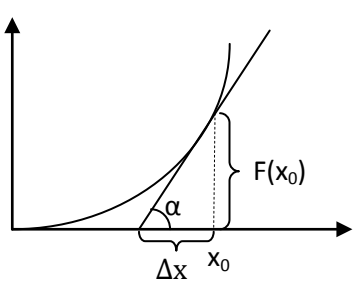

❖ ملاحظه می شود که نصف النهارات بصورت عمود و متساوی الفاصله می باشد.

به دست آوردن $q$ با داشتن φ، کار ساده ای می باشد ولی در برخی موارد نیاز داریم تا با داشتن $q$ ، φ را بدست آوریم.

$$q=Ln\left|Tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-e\,sin\varphi}{1+e\,sin\,\varphi}\right)^2\right|$$

**روش نیوتن برای محاسبه ریشه یک معادله:**

$Y=f(x) \rightarrow y-f(x)=0$




$$F'(x) = m = Tg(\alpha) = \frac{F(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \qquad x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

در روش نیوتن این کار انقدر تکرار می شود تا به صفر دستیابیم (همگرایی آن خیلی زیاد است)

مثال) معادله $X^2-4=0$ را از روش نیوتن حل کنید.

$F(x) = x^2-4$

$F'(x) = 2x \quad \rightarrow \quad x_0 = 10\,,\ x_1=10-\frac{26}{20} = 5.2,\ x_2=5.2-\frac{23.04}{10.4} = 2.98\ ,\ x_3\ldots\ldots\ ,\ x_4\ldots\ldots$

می توان از روش نیوتن، به محاسبه φ پرداخت، معادله $q$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$q= Ln\left|\frac{(1+sin\varphi)^{\frac{1}{2}}}{(1-sin\,\varphi)^{\frac{1}{2}}}\frac{(1-e\,sin\varphi)^{\frac{e}{2}}}{(1+e\,sin\varphi)^{\frac{e}{2}}}\right| \rightarrow$$ توان کسری را بیرون می آوریم →

$$\frac{1}{2}[Ln\,|1+\sin\varphi| - Ln\,|1-\sin\varphi| + e\,Ln\,|1-\sin\varphi| - e\,Ln\,|1+e\sin\varphi|]$$

این را به این دلیل، به این صورت نوشتیم که مشتق گیری از آن ساده شود و در نهایت می شود:

$$F'(\varphi) = \frac{1-e^2}{(1-e^2\,Sin^2\varphi)Cos\,\varphi} = \frac{M}{N\,Cos\,\varphi}$$

**تعریف ضریب اشل (Scale Factor) :**

ضریب اشل در هر نقطه واقع بر صفحه تصویر نشان دهنده میزان اعوجاج (*distortion*) در طول است.البته علت این اعوجاج اعمال شرط تشابه و یا سایر شروطی است که برای ایجاد یک تصویر خاص لازمست. ضریب اشل را با استفاده از دو رابطه زیر بر حسب عرض ایزومتریک و طول ژئودزیک می توان به دست آورد. طبق تعریف، نسبت یک طول روی صفحه نقشه بر یک طول روی بیضوی را گویند:

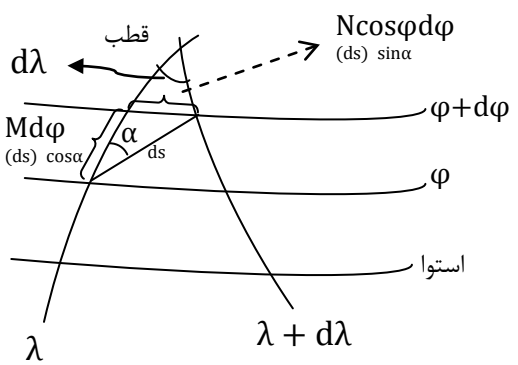
ضریب مقیاس $k^2 = \frac{dS_2^2}{dS_1^2}$ $\longrightarrow$ طول روی نقشه / $\longrightarrow$ طول روی بیضوی

$$K^2 = \frac{dx^2+dy^2}{N^2Cos^2\varphi(dq^2+d\lambda^2)}$$

اگر طول روی صفحه نقشه $(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$ را بر حسب مختصات ایزومتریک جایگذاری کنیم داریم:

$$K^2 = \frac{edq^2 + 2f(dq)(d\lambda) + g(d\lambda)^2}{N^2Cos^2\varphi(dq^2+d\lambda)^2} = \frac{edq^2+gd\lambda^2}{N^2Cos^2\varphi(dq^2+d\lambda^2)}$$

چون سیستم متشابه است، یعنی $F=0$ پس $2f(dq)(d\lambda)$ حذف می شود. بنابراین خطوط نصف النهارات و مدارات عمود بر هم هستند، و در نتیجه در بیضوی هم مدارات و نصف النهارات بر هم عمودند.




$$Tg(\alpha) = \frac{Ncos\,(\varphi)}{M}\frac{d\lambda}{d\varphi} \rightarrow Tg(\alpha) = \frac{d\lambda}{dq}$$

$$dq = \frac{M}{N\cos\varphi}d\varphi$$

قبلا داشتیم $d\lambda = dq\ Tg\alpha$ ، مقدار $d\lambda$ را جایگذاری می کنیم:

$$K^2 = \frac{edq^2+gd\lambda^2}{N^2Cos^2\varphi(dq^2+d\lambda^2)} = \frac{(e+gTg^2(\alpha))dq^2}{N^2Cos^2\varphi dq^2(1+Tg^2(\alpha))} \rightarrow \frac{Cos^2\alpha}{Cos^2\alpha} \rightarrow K^2 = \frac{eCos^2\alpha + gSin^2\alpha}{N^2Cos^2\varphi}$$

قبلا به دست آوردیم که، مقیاس کمیتی ایزوتروپیک است ( به امتداد بستگی ندارد ) پس در اینجا نیز، مقدار $K^2$ باید در $\alpha=0$ و $\alpha=90$ یکی شود، شرایط تشابه برای صفحه ایزومتریک به قرار زیر است:

$$If \quad \alpha=0 \rightarrow K=\frac{\sqrt{e}}{N\ \cos\varphi}$$
$$If \quad \alpha=90 \rightarrow K=\frac{\sqrt{g}}{N\ \cos\varphi}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{matrix} e = g \\ f = 0 \end{matrix}}$$

شرط تشابه برای صفحه ایزومتریک

مطالب زیر را بدون اثبات قبول می کنیم، شرایط کوشی – ریمان برای صفحه ایزومتریک:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=\frac{\partial y}{\partial q} \qquad \frac{\partial x}{\partial q}=-\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

یا

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}=-\frac{\partial y}{\partial q} \qquad \frac{\partial x}{\partial q}=\frac{\partial y}{\partial \lambda}$$

**ضریب مقیاس:**

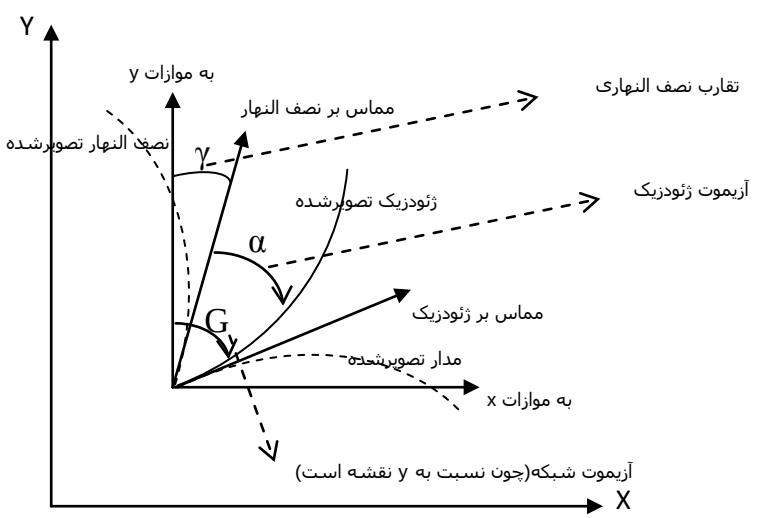
$$K=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2}}{N\ \cos\varphi} \qquad OR \qquad K=\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2}}{N\ \cos\varphi}$$

**تقارب نصف النهاری :**

زاویه بین محور $Y$ شبکه و شمال ژئودتیکی را تقارب نصف النهاری گویند.

$$\tan\gamma=\frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} \quad \text{یا} \quad \tan\gamma=\frac{\frac{-\partial x}{\partial q}}{\frac{\partial y}{\partial q}}$$

توضیح راجع به تقارب نصف النهاری با مراجعه به شکل کاملا تفهیم خواهد شد.



## بررسی مختصری بر سیستمهای تصویر:

### ۱) سیستم تصویر مرکاتور:

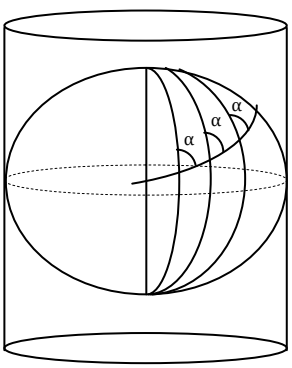
دلیل ابداع این سیستم که منحنی لوکسدروم

می باشد که بصورت یک خط تصویر می شود.

### منحنی لوکسدروم (loxodrome) :

منحنی ایست که نصف النهارات را با زاویه ثابت α (آلفا) قطع می کند. ( دارای آزیموت ثابتی است)

در این سیستم تصویر، یک استوانه قائم در راستای استوای بیضوی مماس شده و نقاط روی بیضوی مرکزی این استوانه تصویر می شوند. پس می توان با برش استوانه، آن را به صفحه نقشه تبدیل کرد.




### ویژگی های اساسی :

۱) مبدأ محور $y$ روی استوا

۲) ضریب مقیاس روی استوا، یک می باشد.

می توان رابطه سیستم تصویر آن را به صورت زیر نوشت.

$$\begin{cases} x=a\lambda \\ y=aq \end{cases} \rightarrow (x+iy)=(a\lambda+iaq)$$

برای بررسی متشابه بودن این سیستم تصویر به معادلات کوشی – ریمان مراجعه می کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \lambda}=\frac{\partial y}{\partial q} \\ \frac{\partial x}{\partial q}=-\frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=a \\ 0=0 \end{cases}$$

پس سیستم متشابه است

### تعیین ضریب مقیاس

$$K=-\frac{\sqrt{(\frac{dx}{d\lambda})^2+(\frac{dy}{d\lambda})^2}}{Ncos\varphi}=\frac{\sqrt{a^2+0}}{Ncos\varphi}=\frac{a}{Ncos\varphi}=1$$

### تقارب نصف النهاری

$$\tan(\gamma)=\frac{\frac{dy}{d\lambda}}{\frac{dx}{d\lambda}}=\frac{0}{a}=0 \rightarrow \gamma=0$$

پس سایر ویژگی ها به صورت زیر است:

۳) $\gamma=0$ ← نصف النهارات به صورت خطوط موازی و هم فاصله (چون $x=a\lambda$) تصویر می شوند.

۴) مدارات به صورت خطوط موازی ولی غیر هم فاصله تصویر می شوند. ($y=aq$)

۵) ضریب مقیاس به λ بستگی نداشته و با افزایش φ زیاد می شود. به طوریکه در قطبین، بی نهایت است، از این سیستم تصویر برای نواحی $-80<\varphi<80$ استفاده می شود.

نکته: اگر به جای بیضوی کره داشته باشیم:

$$K=\frac{1}{Cos\ \varphi}$$

مثال) اگر زمینی را کره فرض کنیم، اعوجاج طولی برای طول *1000 m* را حساب کنید؟

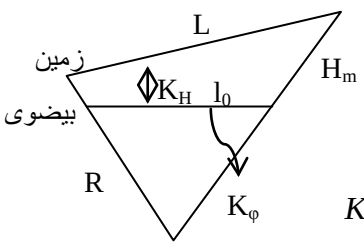
$\varphi=30$

$h=3000m=3\ km$ ارتفاع متوسط $R=6400\ km$

اعوجاج:

*a*) اعمال شدن سیستم تصویر

*b*) اعمال اعوجاج ارتفاعی



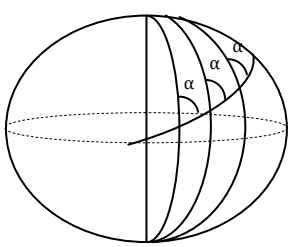

$$K_\varphi=\frac{1}{Cos\ \varphi}=\frac{1}{Cos\ (30)}=1.154700538$$

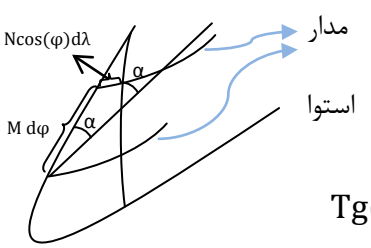
**اعمال سیستم مرکاتور**

$$K_H=\frac{l_0}{l}=\frac{R}{R+H_m}\rightarrow K_H=\frac{R}{R+H_m}=\frac{6400}{6403}=0.999531469$$

طول زمینی با اعمال مقیاس حاصل از $K\varphi$ و $K_H$ = $1000*0.999531469*1.154700538$

اثبات اینکه منحنی لوکسدروم بصورت یک خط در می آید:




$$Tg(\alpha)=\frac{Ncos\ (\varphi)}{M}\frac{d\lambda}{d\varphi}=\frac{d\lambda}{dq}$$

$tg(\alpha)=\frac{d\lambda}{dq}\rightarrow d\lambda=tg\ (\alpha)dq$ $\int_0^\lambda d\lambda=tan(\alpha)\int_0^q dq$ این یک معادله خط با شیب tan α می باشد

$\lambda=q\ tan\ (\alpha)$ $\frac{x}{a}=\frac{y}{a}tan(\alpha)\rightarrow x=y\ tan(\alpha)$

$m=tan\ (\beta)\rightarrow m=tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=cot\ (\alpha)=\frac{1}{tan\ (\alpha)}$

بر خلاف مختصات عادی ضریب *y* را شیب در نظر گرفته و برای تبدیل معکوس داریم:

$\lambda=\frac{x}{a}$

$q=\frac{y}{a}$

با داشتن *x* و *y* ، *q* و λ به دست می آیند و برای محاسبه *φ* از *q* با روش نیوتن استفاده خواهیم کرد.

### ۲) سیستم تصویر ترانسورس مرکاتور (TM)

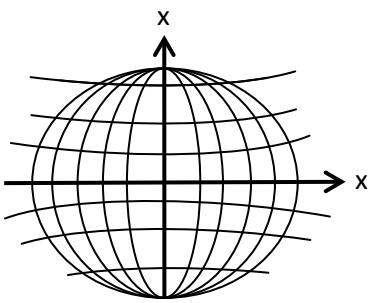
یک استوانه افقی در راستای یک نصف النهار استاندارد بر بیضوی مماس می کنیم.

ویژگی ها:

۱. مبدأ محور $X$ ها روی نصف النهار مرکزی
۲. مبدأ محور $y$ ها روی استوا
۳. فقط استوا و نصف النهار مرکزی بصورت خطی تصویر میشوند.
۴. $\gamma$ فقط روی نصف النهار مرکزی صفر است و در بقیه جاها صفر نخواهد بود، بلکه با دور شدن از نصف النهار مرکزی و با افزایش $\varphi$ ، مقدار $\gamma$ افزایش خواهد یافت.
۵. ضریب مقیاس با دور شدن از نصف النهار مرکزی، افزایش و با افزایش $\varphi$ ، کاهش می یابد.

**شکل کلی**

با دور شدن بیشتر از $30°$ از نصف النهار مرکزی ضریب مقیاس زیاد شده و کاربردی نخواهد داشت، به این دلیل سیستم ترانسورس مرکاتور جهانی ابداع شد (*UTM*)

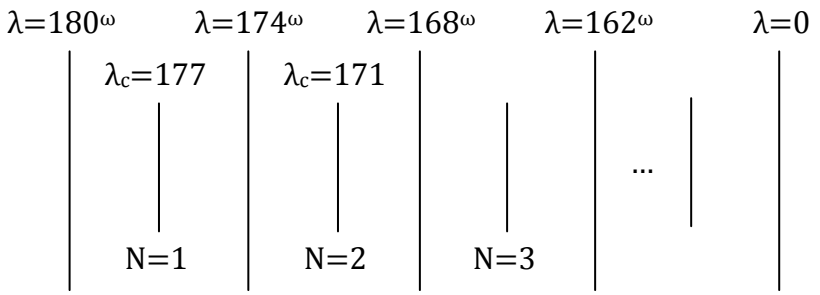



### ۳) سیستم ترانسورس مرکاتور جهانی (UTM)

ویژگی ها:

۱. سیستمی است ترانسورس مرکاتور در قاچ های (*zone*) $6°$
۲. بیضوی مقایسه در منطقه ایران بیضوی بین المللی
۳. مبدأ طول ژئودتیک: نصف النهار مرکزی ← مبدأ عرض ژئودتیک: استوا
۴. $y$ قراردادی برای مبدأ: صفر متر، برای نیمکره شمالی و *10000000* متر برای نیمکره جنوبی، $x$ قراردادی برای مبدأ، *500000* متر می باشد.
۵. ضریب اشل در نصف النهار مرکزی *0.9996*

شماره گذاری قاچ ها : قاچ شماره ۱ از $\lambda=-180$ شروع شده و در جهت غرب به شرق ادامه می یابد.




محدودیت عرض ژئودتیک برای این سیستم $-80<\varphi<+80$

برای طول های غربی، $\lambda$ بصورت منفی در رابطه زیر قرار داده می شود.

شماره قاچ $N=[\frac{\lambda}{6}]+31$ $\lambda_c=6N-183$

مثال) نصف النهار مرکزی مربوط به $\lambda=51°\ 31'w$ و $\lambda=20°\ E$ را بدست آورید.

$\lambda=51°\ 31'w$

$$N=\left[\frac{-51°\ 31'}{6}\right]+31=[-8.2]+31=22$$

$\lambda_c=6*22-183=-51=51\ w$

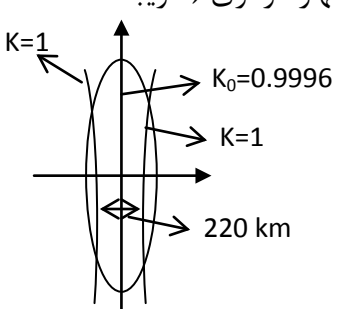
$\lambda=20°E$

$$N=\left[\frac{20}{6}\right]+31=3+31=34$$

$\lambda_c=6*34-183=21\ E$

**ضریب مقیاس**

ضریب مقیاس در نصف النهار مرکزی برابر با $0.9996$ است و حدودا به فاصله $\frac{2}{3}$ از نصف النهار مرکزی (تقریبا ۲۲۰ کیلومتر) به عدد یک رسیده و سپس از عدد یک بیشتر خواهد شد.




ضریب مقیاس در یک نقطه $K_\varphi=0.9996\ (1+\frac{(\Delta\lambda)^2\ \cos^2(\varphi)}{2})$ عرض ژئودتیک نقطه

$\Delta\lambda$ : اختلاف $\lambda$ محل با $\lambda_c$ بر حسب رادیان است، واگر بجای بیضوی کره داشته باشیم، $\Delta l$ فاصله نقطه داده شده از نصف النهار مرکزی است.

$$K_\varphi=0.9996\ (1+\frac{(\Delta L)^2}{2\ R^2})$$

پس طول روی بیضی $WGS\ 84$ باید در $k$ ضرب شوند تا طول روی سیستم تصویر $UTM$ را بدهد.

← در هر منطقه ای به طور کلی می توان دو نوع شعاع تعریف نمود و از شعاع متوسط استفاده کرد. مختصات فضایی نقاط( $x,y,z$ )، مختصات ژئودتیک نقاط( $\varphi,\lambda,h$) مختصات $UTM$ نقاط (ارتفاع اورتومتریک،$E,N$)

$$R=\sqrt{MN}$$

مثال) در مثال قبلی ضریب مقیاس را بدست آورید.

$$K_{\varphi}=0.9996\left(\frac{\left(0^{\circ}\,31'\,0''*\frac{\pi}{180}\right)^{2}\left(Cos(30)\right)^{2}}{2}\right)=0.999630481$$

در حالت کلی شکل زیر را برای محاسبه ضریب مقیاس داریم:

| | $K>1$ | $K<1$ | $K<1$ | $K>1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1.62°<br>*180 Km* | | |

هر درجه، *110 km*

$$K_{\varphi}=\left(\frac{1+(\Delta\lambda)^{2}Cos^{2}(\varphi)}{2}\right)$$

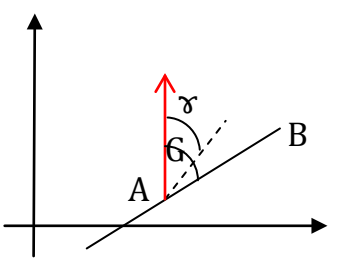
تعیین تقارب نصف النهاری: از رابطه زیر بدست می آید:

$$\gamma=(\Delta\lambda)sin\varphi_{m}$$

نکته: برای بدست آوردن آزیموت با داشتن ژیزمان حتما باید شکل کشیده شود.

مثال) در مثال قبل $\gamma$ را بدست آورید، اگر $G_{AB}=25°$ باشد، آزیموت ژئودتیکی را بیابید.

$$\lambda=51^{\circ}\,31'w\rightarrow\ \Delta\lambda=0^{\circ}\,31'0''$$
$$\gamma=0^{\circ}\,31'0''\ *sin(30)=0°15'30''$$
$$\alpha_{AB}=\ G_{AB}-\gamma=25^{\circ}-0^{\circ}\,15'30''\ =\ 24^{\circ}\,44'30''$$



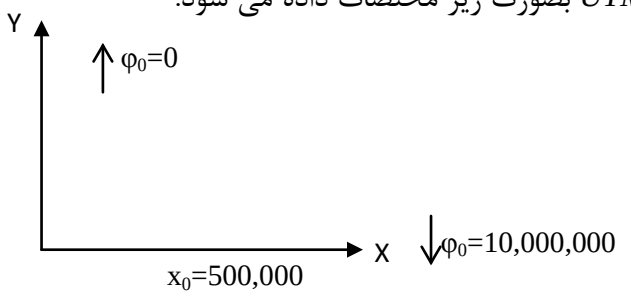

مثال: مختصات روی نقشه نقاط $A$ و $B$ روی $UTM$ بصورت زیر می باشد.

اگر $\varphi_{m}=32°\,47'31''$ و $\lambda_{m}=49°20'35''$ باشند، مطلوب است:

۱. فاصله و ژیزمان AB
۲. شماره zone و $\lambda_c$
۳. تقارب نصف النهاری
۴. آزیموت AB
۵. ضریب مقیاس شبکه ($K=K_{\varphi}*K_{h}$)

| Point | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| A | 346561.592 | 3740263 | 981.926 |
| B | 346647.426 | 3740379.485 | 978.444 |

نکته: برای جلوگیری از منفی شدن *x,y* مبدأ مختصات در *UTM* بصورت زیر مختصات داده می شود:




$$H_m = \frac{H_A+H_B}{2} = 980.185\ m = 0.980185\ km$$

$$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 144.693$$

$$G_{AB} = 36°\ 23'\ 05''$$

$$N = \left[\frac{\lambda}{6}\right] + 31 = 39$$

$$\lambda_c = 6N - 183 = 51\ E$$

$$\gamma = (51 - 49°\ 20'\ 35'')\ sin\ \varphi_m = 0°\ 53'\ 50.58''$$

$$\alpha_{AB} = G_{AB} - \gamma = 3.5° - 29'\ 16.47'' = 35°\ 29'\ 16.47''$$

$$K_H = \frac{R}{R + H_m} = \frac{6400}{6400 + 0.9801} = 0.999846869$$

$$K_\varphi = 0.99974227\left(1 + \frac{((\Delta\lambda)^2 Cos^2\varphi_m)^2}{2}\right) = 0.999895385$$

$$K = K_\varphi + K_h = 0.99974227$$